Výfučtení: Hydrodynamika aneb Hydročtení II

V Hydročtení[1] z třetího ročníku jsme se zabývali tzv. *hydrostatikou* neboli chováním stojících kapalin; toto Výfučtení končilo tím, že o *hydrodynamice*, chování pohybujících se kapalin, napíšeme později. Zmíněný moment nadešel, Hydročtení II je zde. Byť se obě Výfučtení týkají tekutin, není nutné číst předem první díl – obě disciplíny jsou vcelku odlišné.

Než začneme, jaké využití vlastně hydrodynamika má?

- energetika a chemický průmysl – návrh potrubí, čerpadel aj.,
- výzkum cirkulace v oceánech,
- návrh plavidel,
- zkoumání pohybu látek v organismech (např. krve v medicíně)...

A jaký popis hledáme? Jako obvykle ve fyzice – co nejjednodušší a zároveň univerzální (abychom jím popsali celou řadu problémů).[2] Dejme se do toho!

Úvodem

Budeme tedy mluvit o hydrodynamice – součásti fyziky zabývající se pohybem kapalin. Ta společně s aerodynamikou (prouděním plynů) tvoří vědní obor dynamika tekutin. Přidáme-li k dynamice tekutin i dynamiku deformovatelných pevných látek,[3] mluvíme o dynamice kontinua (spojitého prostředí).

Spojitým chceme říct, že hmota je souvislá, můžeme ji libovolně dělit. Správně namítnete, že to není pravda – přece existují atomy – nicméně soustředit se zvlášť na každou částici by bylo nejen nemožné – ale taky zbytečné. Při tak obrovském počtu částic se uvažováním spojitosti nedopouštíme prakticky žádné chyby a s kontinuem umíme lépe pracovat. Co víc, v některých případech za kontinuum považujeme i materiály s většími částicemi – typu písek nebo mouka.

Na druhou stranu, uvažujeme-li deformovatelná tělesa, může existovat situace, kdy by i pevná látka působením sil dostala tvar podle nádoby (ovšem působící síla by musela být velmi velká). Správné kritérium pro rozlišení mezi pevnou látkou a tekutinou je, že u pevné látky existuje rozsah sil, ve kterém je deformace elastická, zatímco tekutiny se při působení síly deformují nevratně. Míru tekutosti nějakého tělesa určuje tzv. *viskozita*, kterou se budeme zabývat na konci Výfučtení.

Modely kapaliny

Představme si nějaký hydrodynamický jev, třeba když pádlujeme a jednou se opřeme pádlem do vody a vytvoří se vír. Dokážeme předpovědět, jak budou vzniklé víry a proudění vypadat?

Podle Newtona máme k dispozici pohybové rovnice. Mohlo by nás tedy napadnout, že vezmeme pádlo jako jedno těleso, na které působí vnější síla našich paží, a pak vezmeme jednotlivé

[1] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`

[2] Zkušenější z vás si nejspíš všimli, že jednoduchost a univerzálnost fyzikálního popisu spolu souvisí – kdybychom začali do modelu přidávat hodně parametrů, veličin apod., pravděpodobně bychom jej nebyli schopni použít na popis vícera jevů. Naopak vyberme pár veličin a pro ty napišme jednoduché vztahy – často vyjadřující vlastnosti naprosto triviální. Principu upřednostňování jednoduchého se někdy říká Occamova břitva.

[3] Více o deformacích se můžete dočíst ve Výfučtení `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/vyfucteni/vyfucteni_3.pdf`

atomy vody jako zbylá tělesa. Napíšeme si Newtonovy zákony, můžeme rovnice vyřešit a zjistíme, jak budou víry vypadat.

Postup s Newtonovým zákonem asi není zrealizovatelný, protože nedokážeme zjistit ani počáteční polohu všech atomů. Je ale cenný v tom, že nám ukazuje jednu dobrou věc: vzhledem k tomu, že Newtonovy rovnice mají jedno řešení, teoreticky by mělo být možné pohyb předpovědět. Známe přeci gravitační zrychlení, parametry pádla, všechny okrajové podmínky atp.

Zkusme ale jiný postup: pádlo pořád bereme jako těleso, ale místo atomů počítáme s myšlenými malými krychličkami vody. To už je představitelnější, malé krychličky si lze lépe představit. Nyní se nám otevírají dvě cesty. Buď pomocí matematických metod uvažujeme, že objem krychliček je nekonečně malý. Pak by *snad* chyba způsobená touto úvahou byla taktéž nekonečně malá, a to je dobře. Tímto bychom obdrželi tzv. *Navier-Stokesovy rovnice.* Druhý způsob spočívá v tom, že necháme krychličky mít nějakou konečnou velikost (třeba $1\,\mathrm{mm}^3$) a necháme počítač spočítat pohyb. Dostaneme nepřesný výsledek, ale zase ho za nás může spočítat počítač.

Nevýhoda Navier-Stokesových rovnic spočívá v tom, že je velmi těžké je vyřešit, v některých případech ani není možné napsat jejich řešení na papír (víme, že řešení existuje, ale neumíme ho lehce popsat) – o tom více níže. Nevýhoda počítačové metody zase nespočívá ani tak v nepřenosti – ukazuje se, že jeho modely fungují. Problém však je, že jeho výpočty trvají dlouho a i tak není jednoduché napsat dobrý výpočetní, resp. simulační program.

Nabízí se ještě třetí možnost – řekneme si, že úkol je moc těžký a spočítáme jen něco. Nebudeme se tedy snažit popsat přesně celý vývoj, ale jen některé veličiny, např. tlak a průtok. Taky učiníme některé idealizace, třeba že kapalinu nelze stlačit. Speciálně zavedeme pojem *ideální kapalina*. Tou budeme rozumět kapalinu, která není stlačitelná a nedochází v ní k žádnému tření. Reálně neexistuje, ale mnoho kapalin je jí velmi podobných.

Dále se vydáme třetí cestou (popíšeme jen něco), dvě cesty výše jsme popsali spíše pro zajímavost.

Dodatek: proč je těžké vyřešit Navier-Stokesovy rovnice

Určitě jste se ve škole již setkali s rovnicemi, ale vždycky jste je vyřešili. Jak se může stát, že existuje rovnice, kterou je tak těžké řešit? Je to totiž jiný typ rovnice, než který se řeší na základních a středních školách. Zatímco pro vás je řešením rovnice obvykle jedno číslo x či v soustavě rovnic několik čísel, Navier-Stokesova rovnice dává jako výsledek polohu částic v čase. Musíme tedy pro každou částici dostat její funkci $x(t)$ – asi si dovedete představit, že je těžší hledat funkci než číslo. A těchto částic (funkcí, které hledáme) je nekonečno.

Snad si nyní dokážete představit, proč je těžké spočítat pohyb tekutin. Jedná se dokonce o jeden z tzv. problémů tisíciletí, na který ani nejlepší fyzici neznají úplnou odpověď.

Rovnice kontinuity

Asi každý při hraní si se zahradní hadicí zjistil, že částečné zakrytí hubice zvýší rychlost stříkající vody. Tento jev jde vysvětlit pomocí rovnice kontinuity. Jelikož počítáme s tím, že voda je ideální kapalina, tudíž nestlačitelná, musí v každém průřezu potrubí za čas Δt projít objem vody ΔV. Pokud se v průběhu toku mění obsah průřezu S, můžeme objem rozepsat jako $\Delta V = S\Delta x =$

$= Sv\Delta t$, kde Δx je vzdálenost, kterou voda urazí za čas Δt rychlostí v. Pro dva různé úseky o různých průřezech S_1 a S_2, ve kterých teče voda rychlostí v_1 a v_2, platí rovnost

$$\begin{aligned} \Delta V &= S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t\,, \\ S_1 v_1 &= S_2 v_2\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Takto se nám podařilo odvodit *rovnici kontinuity.* Jinými slovy říká, že v každé části potrubí se zachovává součin obsahu průřezu a rychlosti vody v daném místě, této konstantní veličině se říká objemový tok q_V a má jednotku $[q_V] = \mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}} = \mathrm{m^3/s}$. Pomocí rovnice kontinuity lze vypočítat rychlost vody stříkající ze zakryté zahradní hadice nebo vody vytékající z vodovodního kohoutku.

Máme-li potrubí o poloměru r, které se následně zúží na poloviční poloměr $r' = 0{,}5r$, bude pro výslednou rychlost v' platit

$$\begin{aligned} \pi r^2 v = \pi r'^2 v' &= \pi \frac{r^2}{4} v'\,, \\ v' &= 4v\,, \end{aligned}$$

tedy voda tímto místem poteče 4krát rychleji. Je zřejmé, že čím tenčí bude potrubí, tím větší rychlost bude mít voda uvnitř – což se shoduje s naší zkušeností se zahradní hadicí.

Můžeme se ptát – existují i zobecnění rovnice kontinuity? Určitě by měly, neboť i sebepodivnější (i stlačitelná) hmota nemůže jen tak zmizet.[4] Dokonce existuje univerzální tvar, který bude více či méně očekávaně vyskakovat v různých oblastech fyziky. Ten je však matematicky výrazně složitější. Proto jej nechme stranou a téměř zadarmo rozšiřme pomocí hustoty kapaliny ϱ (ta může být proměnlivá) na tvar (1):

$$\varrho S v = \text{konst.}\,,$$

který platí i pro stlačitelné kapaliny a říká, že se zachovává hmotnostní tok (kilogramy za sekundu).

Bernoulliho rovnice

Pro obecnější popis proudu kapaliny, ale i tekutiny, se používá Bernoulliho rovnice. Ta popisuje energii kapaliny pro různou výšku h, rychlost v a tlak p kapaliny v různých částech toku. Její základní tvar je

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = \text{konst.}\,, \tag{2}$$

neboli součet tří členů výše je ve všech místech kapaliny stejný, tento součet se zachovává. Jestli vám tento princip připomíná zákon zachování energie, jste na správné stopě, tento zákon funguje podobně. Než si vysvětlíme původ rovnice, ukažme si, jak se používá.

Rovnice je vlastně zákon zachování energie pro různá místa toku ideální kapaliny. Používáme ji tak, že potřebujeme-li znát nějakou z vystupujících veličin v určitém místě (např. výtoková rychlost v_1 kapaliny z nádoby) a známe ostatní veličiny v tomto bodě (tlak p_1, výšku h_1 a hustotu ϱ), najdeme si jiný, „referenční“ bod v kapalině (např. bod na volné hladině, kde

[4] Úvahy o anihilaci ponechme jiným Výfučtením.

známe tlak p_2, rychlost v_2, výšku h_2 a hustotu ϱ) a napíšeme si Bernoulliho rovnici mezi těmito dvěma body

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \,.$$

Z této rovnice už umíme vyjádřit hledanou rychlost v_1.

Ukažme si ještě, jak jednotlivé členy souvisí se zákonem zachování energie. Kdybychom měli kapalinu známého objemu V, mohli bychom její kinetickou a potenciální energii rozepsat stejně, jako v mechanice hmotného bodu nebo tuhého tělesa, tj.

$$\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \frac{1}{2}mv^2 \,, \\ E_\mathrm{p} &= mgh \,. \end{aligned}$$

Tyto veličiny závisí na objemu, protože $m = \varrho V$. Této závislosti se chceme zbavit, protože objem se u stlačitelných kapalin může měnit a ostatní veličiny se mohou měnit v různých bodech objemu. Závislosti se zbavíme tak, že vztahy vydělíme objemem

$$\begin{aligned} e_\mathrm{k} &= \frac{E_\mathrm{k}}{V} = \frac{1}{2}\varrho v^2 \,, \\ e_\mathrm{p} &= \frac{E_\mathrm{p}}{V} = \varrho g h \,. \end{aligned}$$

Takto vzniklé veličiny nazýváme měrné (měrná kinetická energie a měrná potenciální energie) a obvykle značíme malými písmeny.

Může docházet k výměně energie ještě jinak? Obecně může, a to přenosem tepla nebo konáním práce.[5] První neuvažujeme. Konání mechanické práce zohledňují členy za kinetickou a potenciální energii. Jenže to není vše, ještě tady máme tlak. Tlaková energie se vypočte jako

$$E_\mathrm{tl} = pV \,.$$

Proč tomu tak je? Přesvědčme se tím, že ukážeme, že změna této veličiny odpovídá vykonané práci. Představme si třeba, že nějaká kapalina tlačí na píst o ploše S, je v ní tlak p a změní svůj objem. Pak platí:

$$\Delta E_\mathrm{V} = F(x_2 - x_1) = \frac{F}{S}(Sx_2 - Sx_1) = p(V_2 - V_1) \,,$$

kde jsme využili definici tlaku (tlak je síla působící kolmo na jednotkovou plochu) a objem jsme rozepsali jako objem kvádru s obsahem podstavy S a výškou x. To je tzv. objemová práce a odpovídá např. práci hydraulického zvedáku.

Obdobně při změně tlaku dochází ke změně

$$\Delta E_\mathrm{tl} = V\ (p_2 - p_1) \,,$$

což je tzv. tlaková práce, kterou koná např. čerpadlo.

Ukázali jsme si tedy, že všechny tři členy v Bernoulliho rovnici mají význam energie. Tato rovnice tak vskutku vyjadřuje známý zákon zachování energie pro kapaliny.

[5] Tak praví 1. princip termodynamický.

Aplikace hydrodynamiky

Hydrodynamický paradox

Zajímavý důsledek Bernoulliho rovnice je tzv. hydrodynamický paradox. Pokud bychom dali dva listy papíru k sobě a foukli mezi ně brčkem, očekávali bychom, že se listy od sebe oddálí, ale ejhle – papíry se k sobě přitiskly (to si můžete sami zkusit). Pojďme si tuto záhadu osvětlit s pomocí Bernoulliho rovnice.

Konstanta na pravé straně rovnice (2) nám říká, že zvětší-li se jeden člen, musí se úměrně tomu zmenšit jiný. Pro vodorovné proudění můžeme odečíst člen za potenciální energii tíhovou a dostáváme, že

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \text{konst.}$$

To říká, že zvýší-li se rychlost, dojde k poklesu tlaku. Tomu se říká hydrodynamický paradox, protože na první pohled se to může zdát nelogické. Foukneme-li vzduch mezi papíry, mohli bychom čekat, že proudící vzduch bude mít snahu „udělat si místo“. Z Bernoulliho rovnice však víme, že jeho tlak bude nižší než tlak okolní atmosféry (protože ta je v klidu). Rozdíl tlaků pak vyvolá sílu, která přitiskne papíry k sobě.

Tentýž jev je možno pozorovat i v zužujícím se potrubí. Zmenší-li se průměr, dojde ke snížení tlaku, i když bychom mohli čekat, že bude mít proud „natlačený“ do menšího potrubí tlak větší. Z rovnice kontinuity však musí platit $v_1 S_1 = v_2 S_2$. To v souladu s Bernoulliho rovnicí způsobí pokles tlaku na $p_2 < p_1$.

Rychlost toku z kohoutku

Nyní se podíváme na složitější případ s vodou z kohoutku, kdy nás bude zajímat, jakou rychlostí voda vytéká. Právě když voda vytéká z kohoutku, má průřez S_0 a má rychlost v_0. Obsah S_0 můžeme určit celkem jednoduše: můžeme např. změřit průměr proudu vody d_0 pravítkem a z něj S_0 dopočítat. Rychlost vody takto jednoduše neurčíme a místo toho změříme obsah průřezu vody S_1 ve vzdálenosti h od místa výtoku. V tomto místě má voda rychlost v_1 a tu dokážeme odvodit pomocí předešlých veličin. Použijeme-li Bernoulliho rovnici

$$p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 + \varrho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1\,,$$

můžeme udělat několik předpokladů. Proud vody se nachází v prostředí s konstantním atmosférickým tlakem $p_a = p_0 = p_1$, tudíž se oba členy navzájem vyruší. Určíme-li hladinu nulové energie v místě měření druhého průřezu, tedy vzdálenosti $h_0 = h$ od ústí, bude mít voda v tomto místě nulovou potenciální energii a člen vypadne. Poslední úpravou bude vydělení celé rovnice hustotou vody ϱ, jelikož je v každém místě stejná. Pro jednoduchost se zbavíme zlomků vynásobením dvěma a získáme tvar

$$v_0^2 + 2gh = v_1^2\,.$$

Z rovnice kontinuity poté plyne

$$S_0 v_0 = S_1 v_1\,,$$
$$S_0 v_0 = S_1\sqrt{v_0^2 + 2gh}\,,$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghS_1^2}{S_0^2 - S_1^2}}\,.$$

Jinak složitý úkol, měření rychlosti vody, jde jednoduše určit změřením obsahu průřezu vody u ústí a poté v určité vzdálenosti od něj.

Bonus: Viskozita

Spousta zajímavých jevů, které můžeme pozorovat i doma, souvisí s viskozitou neboli vnitřním třením tekutin. Protože jejich popis přesahuje rámec tohoto textu, připojujeme pod čarou odkazy na zajímavá videa.

První video[6] je známý pokus se škrobem a vodou. Dobře ukazuje, že jednotlivé kapaliny se liší nejen velikostí vnitřního tření, ale také způsobem, jak reagují na deformace. Ovládáte-li angličtinu (případně máte-li někoho, kdo umí překládat), doporučujeme brilantní video o podivném chování kečupu.[7]

Poslední video[8] demonstruje tři jevy. První z nich souvisí s napětím v polymerech (látky tvořené velkými molekulami, řádově stovky i více atomů). Druhý jev nastává, pokud se kapalina chová natolik pružně, že výslednice sil působící na rotující kapalinu směřuje dovnitř. Poslední jev je opakem chování škrobu. Dopadající proud má malou viskozitu a dopadá na hladinu, která je velmi tuhá. Díky tomu je možné, aby se proud po dopadu ohnul a odletěl pryč. Pro estetický dojem přidáváme Kayeho efekt zpomaleně.[9]

Závěr

V tomto Výfučtení jsme si pověděli něco málo o vlastnostech kapalin a popsali některé důležité jevy a zákony. Z nich jsou nejpodstatnější rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice, které tvoří základní nástroj ke zkoumání hydrodynamických jevů.

Množství zajímavých jevů jsme zde kvůli jejich náročnosti nemohli řádně popsat, ale i přesto věříme, že vám text poskytl základní přehled o tom, s čím se můžeme potkat.

Hydrodynamika je velmi rozsáhlý obor, a proto není potřeba zoufat, pokud máte spoustu nezodpovězených otázek. Vždycky můžete napsat organizátorům nebo hledat na internetu[10] či v knihovně.

Pokud se rozhodnete studovat fyziku nebo některý z přírodovědných či technických oborů, ještě se s hydrodynamikou setkáte – proudění krve v medicíně a příbuzných oborech, pohyb zemin a pohyb vod v oceánech, sdílení tepla, či obtékání v technických oborech. Do té doby dostanete silnější matematické nástroje, které spoustu věcí zjednoduší a poskytnou jiný pohled na věc.

Do té doby přejeme hlavně zdraví a také hodně úspěchů ve všem, co vás baví.

---

[6] `https://youtu.be/CU2zoB69X1g`

[7] `https://youtu.be/KB43fM_ozKQ`

[8] `https://youtu.be/nX6GxoiCneY`

[9] `https://youtu.be/GX4_3cV_3Mw`

[10] Díky řadě experimentů existuje i spousta videí o této problematice, drobný problém může být častá absence českého překladu.

Patrik Kašpárek
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`

Matěj Rzehulka
`matej@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.