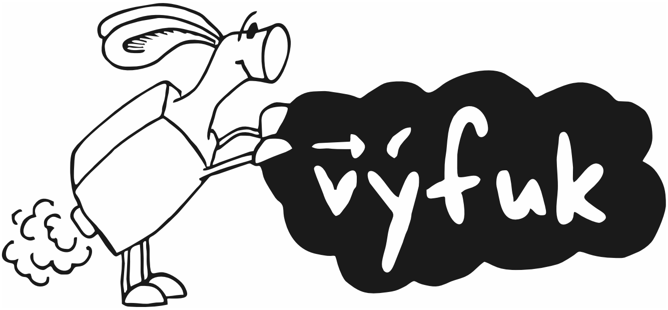
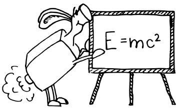
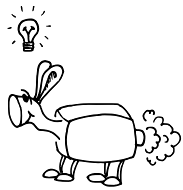


výpočty fyzikálních úkolů



Řešení IV. etapy mimořádné série



Úloha IV.1 ... Váhy pod pokličkou — 2 body

Olověnou a dřevěnou kostku vyvážíme na dvouramenných vahách a následně celou dvouramennou váhu i s předměty strčíme pod pokličku, zpod které odčerpáme vzduch. Co se stane s vahami? Klesne olovo, dřevo, nebo zůstanou nastejno? Proč?

Na obě kostky působí na vzduchu tíhová síla a vztlaková síla. Když jsou váhy vyvážené, tak jsou výslednice těchto dvou sil stejně velké. Pokud dáme váhy pod pokličku a vyčerpáme vzduch, bude na obě tělesa působit pouze tíhová síla. Jak si jistě dovedete představit, dřevěná krychlička má při stejné hmotnosti větší objem než olověná, proto je vztlaková síla působící na dřevěnou krychli větší. Když tedy zpod pokličky vysajeme vzduch, klesne dřevo, protože ve vzduchu mu stačila menší tíha k rovnováze vah, zatímco ve vakuu tuto výhodu nemá. Tento efekt je však velmi malý, takže pokud by např. váhy byly zrezlé a nelehce se otáčely, nemusíme jej vůbec pozorovat.

Úloha IV.2 ... Studí — 2 body

Když v zimě sáhnete na kovovou kliku, tak můžete cítit, že vás studí. Když však druhou rukou sáhnete na dřevěné dveře, tak zjistíte, že dveře studí mnohem méně. Jak je to možné, když dveře i klika mají stejnou teplotu?

Tak jako různé materiály různě dobře vedou elektrický proud a můžeme je dělit na vodiče a izolanty, tak různé materiály různě dobře vedou teplo. Lze si to opravdu představit jako vedení elektřiny – když postavíme hrnec na sporák, zahříváme jeho dno, ale spálíme se po chvíli i o jeho horní okraj. Zároveň platí, že teplo přechází z teplejšího předmětu na chladnější – z vaší ruky na kliku nebo dveře, dokud se teploty nevyrovnají (v případě vaší ruky to však bude trvat dlouho, protože celé vaše tělo neustále produkuje nové teplo).

Schopnost vedení tepla jde většinou ruku v ruce právě se schopností vést proud. Kovová klika si (stejně jako dřevěné dveře) vezme teplo z vaší ruky. Na rozdíl od dřeva, které se zahřeje po chvíli víceméně jenom pod vaší rukou, však kov teplo z vaší ruky odvede rychle do celého svého objemu a žádá si rychle další. Zatímco dveře vás tedy studit přestaly, protože se ohřály už v místě doteku, klika studí dál, protože teplo skončí za stejný čas hlouběji.

To vše nám popisuje fyzikální veličina *tepelné vodivosti*: některé látky vedou teplo lépe (rychleji) než jiné. V našem případě kov vede teplo lépe než dřevo. Proto z vás odvede více tepla a na pocit je tedy studenější.

Poznámka: Samozřejmě, někteří z vás mohou namítnout, že podle tabulek má dřevo několikrát vyšší *měrnou tepelnou kapacitu* než jakýkoli kov, a tak pokud je dřevo chladnější než ruka, mělo by jí ochladit víc než kov. To je sice pravda, ale co tomu brání, je právě mnohem nižší hodnota tepelné vodivosti. Naše kůže necítí teplotu a celkovou změnu tepla, ale obvykle jen okamžitý přítok nebo odtok tepla, který musí být u kovu výrazně větší.

Úloha IV.3 ... Rozladěná 2 body

S hudebními nástroji je potíž. Když houslisté hrají adventní koncerty pod širým nebem, zanedlouho se jim housle rozladí. To samé se stane i kytaristovi, který za chladného večera hraje u táboráku. Čím jsou tyto jevy způsobeny?

Nejprve si musíme uvědomit, že kytara i housle jsou nástroje strunné a ladí se úpravou napětí struny. Délka strun je tedy důležitá. Když kolem špulky umístěné dvacet centimetrů od upevněného konce nitě omotáme nit dlouhou dvacet centimetrů, napneme ji víc než nit čtyřiceticentimetrovou. Stejným způsobem – namotáváním na kolíky – se také napínají struny na kytaře. To napovídá, že problém bude v měnící se délce struny.

Nejen z Výfučtení 4. série tohoto ročníku[1] víme, že materiály s teplotou mění svůj objem. Při ochlazení tedy struna opravdu změní svou klidovou délku. Při poklesu teploty se struna zkrátí. Následkem toho se více napne, tedy bude při rozkmitání vydávat jiný tón (obvykle vyšší) a naše kytara se rozladí.

Úloha IV.4 ... Presumpce linearity 3 body

V USA měří spotřebu aut v tzv. MPG, což znamená míle za galon. Říká, kolik mil urazí auto, které spotřebuje jeden galon pohonných hmot. Bohužel, tato jednotka může být velmi zavádějící, neboť když měříme spotřebu auta, nechová se lineárně. Co tím myslíme, můžete vidět na následujícím příkladu: Alice jezdí autem se spotřebou 12 MPG, *ale koupí si jiné se spotřebou* 14 MPG. *Bob měl kdysi auto se spotřebou* 30 MPG, *a protože chtěl velkou změnu, koupil si auto se spotřebou* 40 MPG. *Pokud oba najezdí za rok* 10 000 km, *kolik galonů pohonných hmot ušetří každý z nich? Kdo ušetří víc?*

Nejprve si převedeme spotřebu aut na kilometry na galon. Jedna míle je přibližně 1,6 km, tedy Alicino staré auto mělo spotřebu 19,2 km/gal a její nové auto 22,4 km/gal. Se starým autem by tak za rok spotřebovala $10\,000\,\mathrm{km} : 19{,}2\,\mathrm{km/gal} \doteq 520{,}83\,\mathrm{gal}$, zatímco s novým autem spotřebuje $10\,000\,\mathrm{km} : 22{,}4\,\mathrm{km/gal} \doteq 446{,}43\,\mathrm{gal}$. Alice tedy ušetří $520{,}83\,\mathrm{gal} - 446{,}43\,\mathrm{gal} \doteq 74\,\mathrm{gal}$.

[1] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r9/vyfucteni/serial4.pdf

Bobovo staré auto mělo spotřebu 48,0 km/gal, zatímco jeho nové auto má spotřebu 64,0 km/gal. Se starým autem by tak Bob za rok spotřeboval 10 000 km : 48,0 km/gal $\doteq$ 208,33 gal, zatímco s novým autem spotřebuje 10 000 km/gal : 64,0 km/gal $\doteq$ 156,25 gal. Bob tedy ušetří cca 52 galonů, což je méně, než ušetřila Alice.

Rozdíl mezi spotřebami auta v jednotkách MPG je výhodnější pro Alici než pro Boba, ačkoliv Bob nakonec spotřebuje méně. Pokud se ale podíváme na rozdíl v evropských jednotkách (litry na 100 km), vidíme, že je výhodnější pro Boba. V těchto jednotkách platí například, že 10% zmenšení spotřeby vyústí v 10% zmenšení spotřebovaného paliva.

Efekt zavádějících jednotek MPG se nazývá *MPG illusion* a je důvodem, proč je spotřeba na amerických autech kromě MPG vždy uváděna i v GPM (galony za míli, tj. podobné jako $\ell/(100\,\mathrm{km})$).

Úloha IV.5 ... Dlouhá šála 3 body

Malý princ se o dlouhých zimních večerech nudil, a tak pletl šálu. Zanedlouho měl šálu dlouhou, jako je obvod celé jeho planetky o poloměru $R = 20\,\mathrm{m}$. Kolik ještě musí připlést, aby měl šálu kolem celé planetky metr nad zemí? A kolik by musel připlést, kdyby měla planetka poloměr tisíckrát větší?

Tato úloha je variace na známý příklad na matematický postřeh o růstu lineárních funkcí. Připomeňme si vztah pro obvod kružnice:

$$o = 2\pi R\,,$$

přičemž množství šály, které je nutno připlést, závisí přímo na tomto obvodu. Jednoduchá algebra nám teď umožňuje zodpovědět možná ne úplně intuitivní otázku ze zadání:

$$o' - o = 2\pi(R + 1\,\mathrm{m}) - 2\pi R = 2\pi(R + 1\,\mathrm{m} - R) = 2\pi\ \mathrm{m}\,.$$

To je zajímavé – výsledek nakonec nebyl závislý na poloměru! Každý metr většího poloměru kružnice nám zvětší obvod o stálých 2π metrů, a to ať jde o kružnici obepínající Zemi, Slunce, nebo třeba i tisíckrát větší planetku Malého prince. Konkrétní údaj o poloměru 20 m tedy není vůbec potřeba a můžete si s ním třeba výsledek numericky zkontrolovat a o tomto faktu se přesvědčit s pomocí kalkulačky.

Zajímá-li vás tato a další úlohy na matematickou intuici, můžeme vřele doporučit video *Jak nás klame intuice 1* Marka Valáška: `http://youtu.be/cuBbmeLwZGg`.

Poznámky k došlým řešením

Většina z vás úlohu spočítala jiným způsobem, než jsme očekávali. Předpokládali jste, že pokud je planetka tisíckrát větší, tak se ptáme, kolik šály má Malý princ připlést k šále z původní planetky, pokud by měla zase obepínat novou. Díky tomu vám ale unikl zmíněný postřeh. Vaše odpovědi vypovídaly, že chudák Malý princ musí připlést šály víc než 125 km. Vzhledem k jednoduchosti úlohy a faktu, že zadání bylo opravdu psáno nejednoznačně, uznáme i tato řešení.

Úloha IV.6 ... Líná Eva 4 body

Eva stojí na hladkém ledě na bruslích. Aby se nemusela moc pohybovat, napadlo ji, že se posune tím, že odhodí kus ledu, který drží v ruce. To se jí opravdu povedlo – po odhození ledové kry o hmotnosti 6 kg *rychlostí* 2,5 m/s *se Eva 7 sekund posunuje dozadu. Jakou vzdálenost se jí podařilo překonat? Eva váží* 60 kg. *Potřebné údaje si dohledejte v tabulkách.*

Uvážíme, že se Eva dozadu posunuje rovnoměrně zpomaleným pohybem. Pro tuto situaci se hodí základní vzoreček rovnoměrně zpomaleného pohybu mezi koncovou nulovou rychlostí a nějakou počáteční v_E, kterou je třeba určit:

$$s = \frac{v_\mathrm{E} \cdot t}{2}\,, \tag{1}$$

kde t je daný čas pohybu a s je hledaná dráha, kterou Eva urazila. Počáteční rychlost Evy určíme ze zákona zachování hybnosti: velikost hybnosti udělená ledu musí být stejně velká jako ta, kterou získala Eva *v opačném směru.*

$$m_\mathrm{L} v_\mathrm{L} = m_\mathrm{E} v_\mathrm{E} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{E} = \frac{m_\mathrm{L} v_\mathrm{L}}{m_\mathrm{E}} \tag{2}$$

Vzoreček (2) dosadíme do vzorečku (1) a dopočteme ze zadaných údajů:

$$s = \frac{\frac{m_\mathrm{L} v_\mathrm{L}}{m_\mathrm{E}} \cdot t}{2} = \frac{m_\mathrm{L} v_\mathrm{L} t}{2 m_\mathrm{E}} = \frac{6 \cdot 2{,}5 \cdot 7}{2 \cdot 60}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}9\,\mathrm{m}\,.$$

Evě led tedy moc nepomohl – zvedat 6 kg jen pro posun o ani ne dva kroky může být na větší vzdálenost náročné.

Úloha IV.7 ... Podivná rovnováha 3 body

K tomuto experimentu budete potřebovat dvě vidličky, sirku, korkovou zátku a volitelně nůž. Nejdřív vložte sirku do korku tak, aby v něm byla pevně, ale aby její část vyčnívala. Následně do korku zabodněte symetricky naproti sobě vidličky. Vznikne tím předmět, který se z hlediska rovnováhy chová podivně, protože zvládne stát na sirce. Popište, proč k tomu dochází.

Obr. 1: Podivně balancující předmět; obrázek převzat z *Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations.*

Abychom jev pochopili, musíme se zeptat, co musí obecný předmět splnit, aby zůstal v klidu. Dle 1. Newtonova zákona je nutné, aby součet sil na něj působících byl nulový. Na naše experimentální vidličky působí gravitační síla v celém jejich objemu, tedy působí na všechny jejich části(ce). Musí tedy na každou částici vidličky působit přesně opačná síla než gravitační v tom bodě?

Bylo by to jedno z možných stabilních uspořádání, ale zdaleka to není nutné. Síly se v pevném předmětu rozloží a různě vyruší. Pro jednoduchost se zavádí těžiště, což je působiště gravitační síly. Působení gravitace na celý (nutno dodat *tuhý*) předmět je tedy stejné, jako kdyby se gravitace soustředila do tohoto jednoho bodu.[2]

Pokud tedy podepřeme těleso pouze v místě těžiště, můžeme vynulovat celkový součet sil působící na těleso a podle 1. Newtonova zákona tedy těleso zůstane v klidu (na začátku se nepohybovalo). Přesně to se ale v experimentu stalo: sklenička podepírá vidličkovou konstrukci přesně v místě těžiště v sirce. Odpověď tedy zní: vidličková konstrukce se dostala do stabilní polohy, protože jsme ji podepřeli proti gravitační síle v místě jejího těžiště (které leží na neobvyklém a pro mnohé nepředpokládaném místě).

Poznámka: Z většiny ovlivňují polohu těžiště ty části soustavy, které jsou nejtěžší. V našem případě jsou nejtěžší právě vidličky a sirka se na celkové hmotnosti podílí jen velmi málo. Důležitou vlastností těžiště je, že *nemusí být v objemu tělesa.* Pokud tedy sirku zlomíme, anebo třeba vůbec do korku nezapíchneme, těžiště zůstane zhruba na svém místě, avšak v něm pak už není nic, za co by šlo těleso podepřít, a v dané poloze by jej nešlo nijak stabilizovat.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] Například u kapalin a plynů je používání těžiště mnohdy méně užitečné, protože když nějaké (nejen gravitační) síly působí na jakoukoli část tekutiny, okolí to bezprostředně nemusí ovlivnit, a pak se nedá říci, že bychom mohli pohyb celého tělesa charakterizovat jedním nebo více body jednoho vybraného místa uvnitř.