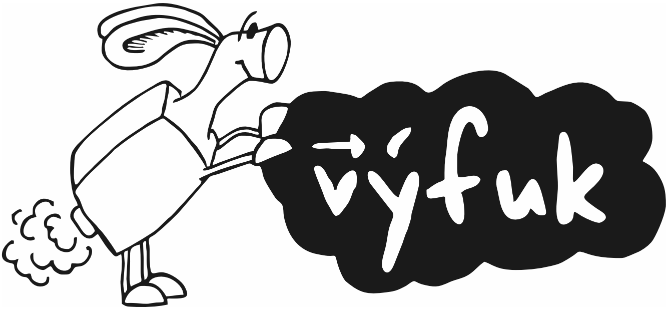
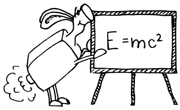
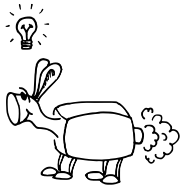


výpočty fyzikálních úkolů



Řešení I. etapy mimořádné série



Úloha I.1 ... Zeměplocha – fantasy nebo sci-fi? 2 body

Napiš alespoň dva přesvědčivé důvody, proč Země není placatá. Pozoroval/a jsi nějaký z nich sám/sama?

Prvním jednoduchým důkazem toho, že Země není plochá, je skutečnost, že pokud se díváme na loď plující dostatečně daleko po moři, za nějakou dobu zmizí pod naším obzorem (a to postupně, bez přepadu). Stejně tak pokud bychom na této lodi stáli, za chvíli by nám (postupně!) zmizela z dohledu pevnina.

Dalším důkazem pozorovatelným ze Země je zatmění Měsíce. Stín na Měsíci nemá tvar obdélníku nebo elipsy, jak by tomu bylo u ploché Země, ale je (přibližně) kruhový.

Ještě můžeme uvést Eratosthenovo měření poloměru Země, kdy pomocí délek stínů dvou stejně dlouhých tyčí, umístěných na dvou různých místech stejné zeměpisné délky, měřených ve stejný čas, změřil poloměr Země. Jelikož tyče měly rozdílnou zeměpisnou šířku, dopadalo na ně světlo Slunce pod rozdílným úhlem a tím pádem byla délka stínu rozdílná.

Dalším důkazem je závislost času východu a západu Slunce na zeměpisných souřadnicích. Samozřejmě i snímky z družic dokazují kulatost Země (a to i družic ze všech států, které kdy tyto družice vypustily, tedy teorie o konspiraci by byla neudržitelná). Těchto důkazů je tolik, že bychom je mohli vyjmenovávat donekonečna.

Existuje řada pokusů dílčí jevy vyvrátit jako důsledky jiného modelu (např. že za postupné ztrácení lodí z dohledu mohou atmosférické jevy), a ty nám poskytují zajímavá myšlenková cvičení. Avšak mimo modelu kulaté země neexistuje žádný tak dobrý, aby uspokojil veškerá pozorování.

Úloha I.2 ... Žbluňk

2 body

Představte si, že jste na výletní lodi a omylem jste si do batohu přibalili kámen. Proto se rozhodnete ho z lodi vyhodit do vody. Váš kamarád se na vás mezitím dívá z břehu. Co uvidí? Stoupne hladina vody? A loď stoupne, nebo klesne?

Nejprve provedeme hrubou úvahu a pak ji podpoříme výpočtem. Ohledně lodi: ta byla nejdřív naložena kamenem, pak jsme zmenšili její váhu, a tedy by měla mít menší ponor – měla by stoupnout.

Jak působil kámen na hladinu? V prvním případě tlačil dolů loď a tím vytlačoval vodu. V druhém případě vytlačil tolik vody, kolik byl jeho objem. Asi tedy záleží na jeho hustotě – když bude hodně hustý, vytlačí více vody nepřímo tím, že tlačí na loď, než když pouze vytlačí svůj objem.

Nyní k výpočtu. Pokud je kámen přítomen na lodi, pak je síla, kterou působí loď na hladinu vody, rovna:

$$F_{\mathrm{L}} = (m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{K}})g\,,$$

kde m_{L} je hmotnost lodi a m_{K} hmotnost kamene. Tuto sílu vyrovnává vztlaková síla vody:

$$F_{\mathrm{vz}} = V_{\mathrm{L}}\varrho_{\mathrm{V}}g\,,$$

kde V_{L} je objem ponořené části lodi a ϱ_{V} hustota vody. Můžeme tedy napsat:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{L}} &= F_{\mathrm{vz}}\,, \\ m_{\mathrm{L}} + m_K &= V_{\mathrm{L}}\varrho_{\mathrm{V}}\,, \\ V_{\mathrm{L}} &= \frac{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{K}}}{\varrho_{\mathrm{V}}}\,. \end{aligned}$$

Máme tedy vyjádřený objem ponořené části lodi. K tomu přičteme objem vody v celém jezeře V_{V}:

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{K}}}{\varrho_{\mathrm{V}}} + V_{\mathrm{V}} = \frac{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{K}} + m_{\mathrm{V}}}{\varrho_{\mathrm{V}}}\,.$$

Můžeme přitom říci, že čím větší V_{C}, tím výše je vodní hladina. Zjistíme hodnotu tohoto součtu v případě, že je kámen ve vodě, a oba případy porovnáme. V druhém případě je síla, kterou působí loď na hladinu vody, rovna:

$$F'_{\mathrm{L}} = m_{\mathrm{L}}g$$

a vztlaková síla vody:

$$F'_{\mathrm{vz}} = V'_{\mathrm{L}}\varrho_{\mathrm{V}}g\,,$$

kde V'_L je objem ponořené části lodi v druhém případě. Pak platí:

$$\begin{aligned} F'_{\mathrm{L}} &= F'_{\mathrm{vz}}\,, \\ m_{\mathrm{L}} &= V'_{\mathrm{L}}\varrho_{\mathrm{V}}\,, \\ V'_{\mathrm{L}} &= \frac{m_{\mathrm{L}}}{\varrho_{\mathrm{V}}}\,. \end{aligned}$$

Abychom získali hodnotu součtu objemů V'_C v tomto případě, musíme na rozdíl od prvního případu ještě přičíst objem kamene:

$$V'_\mathrm{C} = \frac{m_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{V}} + V_\mathrm{V} + V_\mathrm{K} = \frac{m_\mathrm{L} + m_\mathrm{V}}{\varrho_\mathrm{V}} + \frac{m_\mathrm{K}}{\varrho_\mathrm{K}} = \frac{m_\mathrm{L} + m_\mathrm{V} + \dfrac{\varrho_\mathrm{V}}{\varrho_\mathrm{K}} m_\mathrm{K}}{\varrho_\mathrm{V}} \,.$$

Srovnáme-li oba případy, vyplyne nám, že záleží pouze na zlomku $\varrho_\mathrm{V}/\varrho_\mathrm{K}$, kde ϱ_K je hustota kamene. Jestliže bude hodnota zlomku větší než jedna, pak bude součet objemů i výška hladiny vody větší v druhém případě. Pokud bude naopak menší než jedna, pak bude součet objemů i výška hladiny vody větší v prvním případě. *Jelikož kámen má větší hustotu než voda, bude zlomek menší než jedna a hladina tedy po odhození kamene klesne.* Zda loď stoupne nebo klesne jsme již v podstatě vypočítali. Porovnáním V_L a V'_L nám vyjde, že V_L je větší, a tudíž je část objemu lodi nad hladinou menší. *Loď tedy vůči vodní hladině stoupne.* Úlohu bychom však museli přepočítat, kdyby se kámen zcela neponořil (většina kamenů však naštěstí klesá ke dnu).

Úloha I.3 ... Měsíční 2 body

Výfuček si na Měsíc vzal kyvadlové hodiny a všiml si, že jdou mnohem pomaleji! Proč? Věděl/a bys kolikrát?

Periodu kmitů kyvadlových hodin přiblížíme vztahem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

kde l je délka kyvadla a g tíhové zrychlení. U skutečných kyvadlových hodin je vhodné používat jiné, složitější vzorce závislé na poloze těžiště kyvadla, avšak závislost se zhruba zachovává: perioda se prodlužuje s délkou kyvadla a zkracuje se sílící gravitací.

Jediná hodnota, která se zde mění, je tíhové zrychlení, protože Měsíc je lehčí než Země. Na Měsíci je přibližně rovno $g_\mathrm{M} = 1{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Porovnáme periody:

$$\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{Z}} = \sqrt{\frac{g_\mathrm{Z}}{g_\mathrm{M}}}\,,$$

kde T_M je perioda kmitů na Měsíci, T_Z perioda kmitů na Zemi a $g_\mathrm{Z} = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ tíhové zrychlení na Zemi. Dosadíme hodnoty:

$$\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{Z}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}62}} \doteq 2{,}46\,.$$

Na Měsíci jsou tedy kyvadlové hodiny zhruba 2,5krát pomalejší než na Zemi. To je způsobené rozdílným tíhovým zrychlením, které je způsobené rozdílnou hmotností a velikostí tohoto tělesa.

Úloha I.4 ... Opilý hajný 3 body

Hajný se byl po náročném týdnu posilnit v hospodě, která je od hájovny vzdálena 8 km*. Šel tam i se svým psem Harrym, protože i on si zasloužil odměnu. Harrymu koupil misku buřtů a sám si dal několik piv s gulášem. Když už mu nezbývaly peníze, tak se rozhodl vrátit. V podnapilém stavu byl však výrazně pomalejší než posilněný Harry, a proto byl hajný teprve v polovině cesty domů (kupodivu šel i přiměřeně rovně), když už Harry doběhl k hájovně. Nechtělo se mu však* *čekat na páníčka, tak hajnému vyběhl opět vstříc. Běhal stále k hájovně, k páníčkovi a opět k hájovně do té doby, než do hájovny došel i hajný. Kolik km Harry naběhal, pokud šel hajný rychlostí* $4\,\mathrm{km/h}$*?*

První možnost, která se nám při řešení této úlohy nabízí, je sčítat vzdálenosti, které Harry uběhne na jednotlivých úsecích. Těch je však při zanedbání Harryho rozměrů nekonečně mnoho, proto zvolíme poněkud odlišný postup. Víme, že Harry byl u hájovny, když byl hajný teprve v polovině cesty domů. Z toho plyne, že musel běžet dvojnásobnou rychlostí než hajný, tedy $8\,\mathrm{km/h}$. Harry běhal celou dobu, jakou šel hajný z hospody domů, což bylo

$$t = \frac{s}{v} = \frac{8\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km/h}} = 2\,\mathrm{h}\,.$$

Harry tedy běhal 2 hodiny a urazil dráhu $s = vt = 8\,\mathrm{km/h} \cdot 2\,\mathrm{h} = 16\,\mathrm{km}$.

Úloha I.5 ... Toaletní 3 body

Protože úlohy s toaletní tématikou patří mezi naše oblíbené, odhadněte, jakou rychlostí by se musela odmotávat role toaletního papíru, pokud by to byla jediná role na světě a musela by pokrývat okamžitou spotřebu papíru celého světa. Předpokládejte, že má rozměry takové, že v ní je tolik papíru, aby vystačil lidstvu na den.

Ptáme se na okamžitou rychlost, tedy zkusíme odhadnout, kolik lidí najednou sedí na toaletě. Pro zjednodušení uvažujme, že všechny domácnosti jsou čtyřčlenné s jednou toaletou (to pokryje případné výkyvy v počtu členů i toalet), tedy na toaletě sedí maximálně 1/4 světové populace najednou. Z toho nejvýše třetina má noc a místo sezení na toaletě leží v posteli. To už dává $1/4 \cdot 2/3 = 1/16$ (když 1/3 spí, musíme počítat s 2/3).

Vícero zdrojů tvrdí, že průměrný Brit stráví na toaletě okolo tří hodin týdně. Z takového údaje vyplývá téměř 26 min denně. To z jednoho dne tvoří $25{,}7\,\mathrm{min}/1\,440\,\mathrm{min} \doteq 1/56$ času pro průměrného člověka, a tak z oné šestnáctiny populace, která by vůbec na WC mohla být máme další 1/56, což dává 1/896 populace v jednu chvíli požadující toaletní papír.

Z osmi potřeb denně bývá šest malých se spotřebou odhadem čtyř dílků papíru a dvě velké s přibližně trojnásobnou spotřebou. V průměru to dává šest dílků na jedno sezení na toaletě. Dále víme, že lidí je asi sedm miliard. Vynásobíme počet lidí jejich zlomkem sedícím na toaletě a to vynásobíme počtem dílků papíru na člověka

$$\frac{1}{896} \cdot 7 \cdot 10^9 \cdot 6\ \text{dílků} \doteq 47\ 000\ 000\ \text{dílků}\,.$$

Jeden dílek je dlouhý $12{,}5\,\mathrm{cm}$, jak se dočteme na běžné roli toaletního papíru, tedy za $3{,}2\,\mathrm{min}$, které na toaletě stráví jedna skupina, se musí odmotat přibližně $5\,900\,000\,\mathrm{m}$ papíru, což dává výslednou rychlost přibližně $31 \cdot 10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Odhad rychlosti odmotávání role by se tedy měl pohybovat v řádech desítek tisíc metrů toaletního papíru za sekundu.

Úloha I.6 ... Kde žije ta energie? 4 body

Jedním ze zásadních výdobytků fyziky je zákon zachování energie, který v různých formách platí od kvantové fyziky až po relativitu. My tento zákon zachování můžeme využít ke stavbě jednoduchého a spíše zábavného kanónu. Stačí k tomu dva různě velké a co nejpružnější míčky. Podívejme se na teoretický průběh jednoho takového experimentu:

Mějme jeden větší míček A a jeden menší míček B, který posadíme na větší míček, a oba míčky zvedneme do výšky H nad zemí (uvažujte, že malé poloměry míčků r a R jsou vůči velké výšce H zanedbatelné). Následně oba míčky necháme padat.

- *Jakou rychlostí dopadnou na zem oba míčky?*
- *Po odrazu zůstane míček A stát, zatímco míček B poletí nahoru. Je-li hmotnost míčku A $3m$ a hmotnost míčku B m, napište zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti, které popisují tuto situaci.*
- *Jakou rychlostí poletí malý míček B nahoru a do jaké výšky doletí?*

Než začneme počítat, je nejlepší si úlohu představit. Experiment, který jsme popsali, můžete vidět např. zde: `https://www.youtube.com/watch?v=mIVO4vpeD6U`.

Nyní můžeme spočítat odpoveď na první otázku: jakou rychlostí dopadnou oba míčky na zem? K tomu využijeme zákon zachování mechanické energie. Na začátku se potenciální $E_\mathrm{p} = m_\mathrm{m} g H$, kde m_m je hmotnost jednoho z míčků, rovná kinetické na konci $E_\mathrm{k} = m_\mathrm{m} v_\mathrm{m}^2/2$, kde v_m je rychlost jednoho z míčků. Dostáváme:

$$v_\mathrm{m} = v = \sqrt{2Hg}\,.$$

Tedy na hmotnosti nezáleží, oba míčky budou stejně rychlé. Nyní pro zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie si označíme v_i rychlost míčků před srážkou a v_mf finální rychlost míčků po srážce (oba míčky budou mít jinou rychlost). Celková jejich hybnost $p = mv$ se musí zachovat, tedy musí být stejná před a po srážce. To zapíšeme rovnicí:

$$\begin{aligned} p_\mathrm{i} &= p_\mathrm{f}\,,\\ (m_\mathrm{B} - m_\mathrm{A})v_\mathrm{i} &= m_\mathrm{A} v_\mathrm{Af} + m_\mathrm{B} v_\mathrm{Bf}\,,\\ -2mv_\mathrm{i} &= 3mv_\mathrm{Af} + mv_\mathrm{Bf}\,,\\ -2m\sqrt{2Hg} &= 0 + mv_\mathrm{Bf}\,,\\ v_\mathrm{Bf} &= -2\sqrt{2Hg}\,. \end{aligned}$$

Zde jsme použili fakt, že srážka, kterou sledujeme, je srážka většího míčku skákajícího nahoru (ten se předtím ještě srazil se zemí) a malého míčku padajícího dolů. Proto je rychlost velkého míčku záporná – míří nahoru. Také jsme dokázali vypočítat rychlost tím, že jsme dosadili, že $v_\mathrm{Bf} = 0$ dle zadání a hmotnost míčů je m resp. $3m$.

Nyní zbývá napsat zákon zachování energie. Zachovává se celková kinetická energie před srážkou a po srážce:

$$\begin{aligned} E_\mathrm{ki} &= E_\mathrm{kf}\,,\\ 3mv_\mathrm{i}^2 + mv_\mathrm{i}^2 &= mv_\mathrm{f}^2\,,\\ |v_\mathrm{f}| &= 2\sqrt{2Hg}\,. \end{aligned}$$

Zde jsme úpravy již tak moc nerozepisovali. Vidíme ale, že nám rovnice řekla, co jsme již věděli: že se rychlost (přesněji její velikost) malého míčku zdvojnásobí. Rovnice také vyjadřuje jeden poznatek, a to že srážka je tzv. pružná, tj. platí zákon zachování energie – v ději se žádná energie neztrácí.

Nyní k poslednímu bodu. Již jsme spočetli, že malý míček poletí nahoru dvojnásobnou rychlostí. Do jaké výšky doletí? K tomu opět využijeme zákon zachování energie – tentokrát je kinetická energie dole rovna potenciální energii potřebné na vystoupání do hledané výšky h:

$$
\begin{aligned}
E_\mathrm{k} &= E_\mathrm{p}\,,\\
\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 &= mgh\,,\\
h &= \frac{v_\mathrm{f}^2}{2g} = 4H\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy možná překvapivý výsledek: malý míček se odrazí až do čtyřikrát větší výšky, než ze kterého jsme jej shodili. Za běžných podmínek se nám takováto výška nejspíš nepovede, protože v ději figuruje tření a různé jiné ztrátové faktory, přesto je možné si sestrojit relativně efektivní kanón.

Pozn.: tento výsledek se neshoduje s přiloženým videem také proto, že experimentátor má jiné poměry hmotností míčků.

Pozn. 2: Studovaný jev je klíčový pro pochopení vzniku supernov, neboli nejznámějšího druhu výbuchů hvězd. Gravitace je smršťuje tak rychle, že lehčí svrchní slupky hvězdy se od spodních, které se dostanou na maximální mez smršťování (jádro se přemění na neutrony, které je skokově mnohem obtížnější dále smrštit), odrazí a poháněny radiací z jádra se obrovsky urychlí ven do prostoru.

Úloha I.7 ... Proměna 3 body

Když se Řehoř Samsa jednou ráno probudil z nepokojných snů, shledal ve své posteli, že je proměněn v jakýsi obludný hmyz – tak zní první věta jedné z nejslavnějších knih pražského autora F. Kafky. Byť se taková proměna běžnému člověku nestane, nezmění se něco jiného? Změřte večer před spaním svou váhu a výšku a to samé změřte hned po probuzení. Zaznamenali jste nějaký procentuální rozdíl? Jak si to lze vysvětlit?

Měřili jsme výšku a váhu před a po spánku, který trval 7,5 h. Experimentátor u sebe naměřil před spaním výšku 181 cm a váhu 72,4 kg a po spaní výšku 185 cm a váhu 70,9 kg. Zaznamenali jsme tedy nárůst výšky o dvě procenta a pokles váhy taktéž o dvě procenta.

V obou oblastech jsme pozorovali relevantní změny, tedy takové, které jsou větší než chyby měření. Vysvětlujeme si je tak, že během spánku se z těla odpařuje voda (zejména dýcháním) a tím se stává lehčí. Lidské tělo je složeno z více než 50 % vody, takže tento efekt může vskutku být signifikantní. Zvětšení výšky si vysvětlujeme tím, že se přes dobu spaní natáhla páteř, která se přes den, kdy naopak stojíme či sedíme, smršťovala.

Úloha I.8 ... Experimentální úloha – David a Goliáš 5 bodů

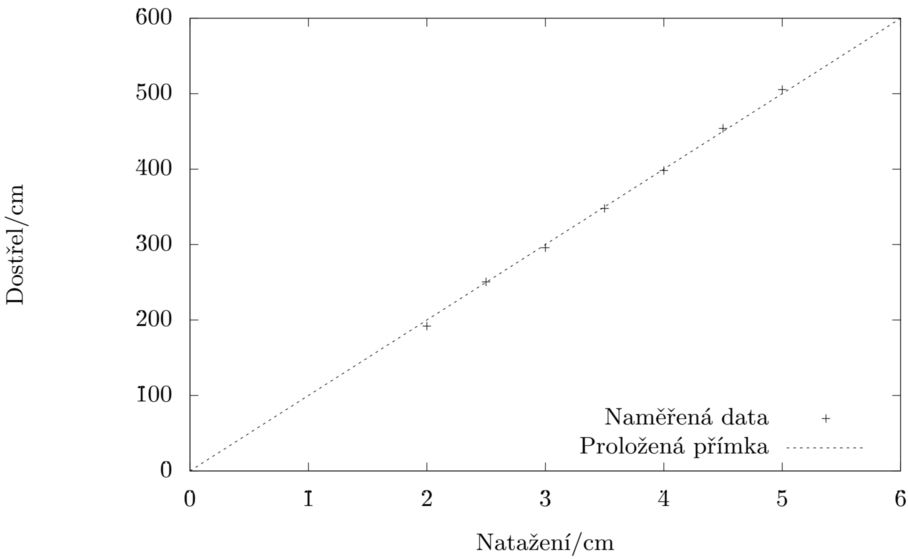
V této úloze je úkolem změřit parametry důmyslného střelného nástroje – praku. Sestrojte si proto prak např. z tužek a z gumiček tak, aby gumičky byly pevně na praku umístěny a nehýbaly se a aby mezi tužkami byl pevný úhel. Alternativně můžete použít předmět ve tvaru Y. Také si sežeňte vhodný a bezpečný projektil, např. zatíženou kuličku od papíru obalenou izolepou.

- *Konstrukce (1 bod): Popište konstrukci praku (můžete doplnit obrázkem nahraným přes např.* `http://leteckaposta.cz/`*).*

- *Měření dostřelu (2 body): Prak si stabilně umístěte a změřte vzdálenost jeho dostřelu v závislosti na tom, jak daleko prak natáhnete. Vložte naměřené hodnoty, případně obrázek tabulku či graf naměřených dat, a okomentujte výsledek.*
- *Chyba měření (1 bod): Bylo vaše měření z nějakého důvodu nepřesné? Např. chyba ve měření vzdálenosti či nepřesné střílení praku? Okomentujte zdroj a velikost chyb měření.*
- *Závěr (1 bod): Stručně popište, na co jste v experimentu přišli – jaká data jste naměřili a jak je interpretujete. Tj. jestli vaše měření bylo spolehlivé a co o vašem praku říká.*

Rám praku je tvořen dvěma tužkami, které jsou svázány provázkem do tvaru písmene V. Mezi tužkami je napnuta gumička s klidovou délkou 2 cm, která je na nich upevněná pomocí gumových lepítek. V místě, kde je gumička upevněna, je mezi vnitřními hranami tužek vzdálenost 4,4 cm. Prak jsme připevnili pomocí izolepy tak, že se gumička nacházela ve výšce 103,5 cm nad podlahou. Jako projektil jsme použili několikrát přeložený papírový proužek, který jsme nakonec přeložili napůl a obalili izolepou, čímž vznikl objekt ve tvaru V, jehož výhodou bylo, že bylo jednoduché ho zaháknout za gumičku.

Abychom dosáhli rozumného měření, snažili jsme se, aby byly všechny výstřely provedeny stejně. Gumičku jsme vždy natáhli rovnoběžně s podložkou do předem určené vzdálenosti. Následně jsme projektil vystřelili a zaznamenali jsme vzdálenost místa dopadu. Pro každou ze zvolených délek natažení gumičky jsme provedli deset měření a spočítali jsme průměrný dostřel. Výsledky jsou zaznamenány v následujícím grafu:



Obr. 1: Graf dat

Jak vidíme, dle všeho je dostřel praku přímo úměrný jeho natažení. Proto graf proložíme lineární funkcí $y = 100 \cdot x$, která naměřeným datům poměrně dobře odpovídá. Dle našeho grafu tedy vzroste dostřel našeho praku přibližně o 1 m za každý 1 cm natažení.

Zdrojů chyb našeho měření mohlo být docela hodně, což potvrzoval poměrně velký rozptyl naměřených hodnot pro stejné natažení. Právě proto jsme také provedli více měření pro každé natažení. Domníváme se, že největším zdrojem chyb mohly být nepřesnosti v umisťování projektilu do pozice pro výstřel. Délku natažení jsme určovali s přesností $\pm 1\,\mathrm{mm}$. To by dle našich dat mohlo mít za následek odchylku od očekávané hodnoty až $10\,\mathrm{cm}$. K drobným chybám také mohlo docházet při určování úhlu, pod kterým byl projektil vystřelen. Tato chyba celkem logicky roste s větším natažením praku. Pro dostřel jednoho metru by měla mít efekt menší než $5\,\mathrm{cm}$, ale například pro tři metry může mít velikost již kolem $30\,\mathrm{cm}$ (díky odporu vzduchu by ale v realitě asi měly být o něco menší). K chybám mohlo docházet i při měření vzdálenosti místa dopadu projektilu. Projektil se samozřejmě při dopadu na zem hned nezastaví a ještě chvíli pokračuje v pohybu. Tento fakt komplikuje měření, protože kvůli němu není možné přesně určit místo dopadu. Tato příčina způsobuje nepřesnost v měření vzdálenosti o velikosti $\pm 2\,\mathrm{cm}$.

I přes poměrně velký rozptyl naměřených hodnot můžeme říct, že naše měření bylo poměrně spolehlivé díky více provedeným měřením. Zjistili jsme tedy, že dostřel praku je přímo úměrný jeho natažení, a že pro náš prak přibližně platí, že za každý centimetr natažení se zvětší dostřel praku o metr (pokud střílíme vodorovně).

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.