výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

školní rok se nám pomalu blíží ke konci a s ním přichází letos již šestá brožurka Výfuku. Najdete v ní zadání 6. série, ve které jsme se v každé úloze zaměřili na nějakou myšlenku, ve kterou lidé dříve věřili, a ukážeme si, proč je daná představa špatně. Uvidíte tak, že Země je kulatá, atom není nejmenší částice nebo že průtok můžete měřit fotoaparátem. Výfučtení se tentokrát zabývá prouděním kapalin – hydrodynamikou. Přejeme vám příjemné čtení.

Pozor! Tento rok také 6. série nebude poslední. Letos se vrátíme k tradici prázdninových sérií, ale o tom více až v další brožurce.

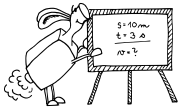
Tato brožurka se k vám netradičně nedostává poštou, ale pouze e-mailem stejně tak, jako opravená řešení 5. série budeme distribuovat jen elektronicky. Rovněž jsme byli okolnostmi nuceni zrušit Jarní setkání, ale nelenili jsme a připravili pro vás mimořádnou sérii[1], kterou zatím v hojném počtu řešíte. Pokud jste se do jejího řešení ještě nezapojili, nikdy není pozdě začít; drobným propagačním předmětem bude oceněn každý, kdo se do jejího řešení zapojí.

Aby to nebylo málo, nachystali jsme pro vás na našem webu naučné texty o programech LaTeX[2] a Gnuplot[3], které jsou hojně využívané k sepisování fyzikálních textů, jakými mohou být právě vaše řešení. Přejeme vám příjemné jaro a doufáme, že se s co nejvíce z vás uvidíme na letním táboře.

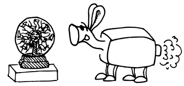
Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

[1] https://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/r9/sx
[2] https://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/latex
[3] https://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/gnuplot

matfyz



Zadání VI. série



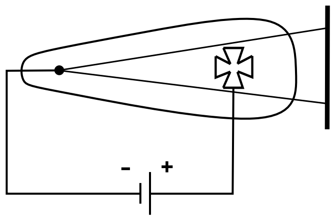
Termín odeslání: 18. 5. 2020 20.00

Úloha VI.1 ... Subatomární dělo ❻ ❼ 5 bodů

Slovo *atom* je odvozeno od řeckého *a-* (zápor) a *tomos* (dělit), což znamená nedělitelný. Koncept malých částic, ze kterých se skládá hmota, se ujal (hojně např. v chemii), a tak lidé pojmenovali některé částice, které pozorovali, jako atomy (např. atom vodíku, atom kyslíku...). Mysleli si tehdy, že to, co pojmenovali jako atom, je skutečně nedělitelné.

K vyvrácení této myšlenky došlo až v polovině 19. století díky pokusu s takzvanou *katodovou trubicí*. Jedná se o trubici se sníženým tlakem, ve které jsou dvě elektrody, mezi kterými je elektrické napětí. Když je tlak vzduchu dostatečně malý, začnou ze záporné katody vyletovat záporně nabité *elektrony*, jejichž část dopadá na kladně nabitou anodu a část pokračuje v cestě dále, čímž na stínítku vznikne stín anody. Mějme tedy katodovou trubici, kde je anoda ve tvaru kříže vzdálená od zdroje elektronů 5 cm a 7 cm za anodou je stínítko, na kterém pozorujeme kříž o velikosti 2,4 cm. Jaký je rozměr anody?

Díky výše zmíněnému pokusu tak dnes nazýváme slovem atom ty částice, které jsou dělitelné. „Správné atomy“, tj. menší, opravdu nedělitelné částice, mohou existovat.



Obr. 1: Katodová trubice.

Úloha VI.2 ... Když nemůžeš, tak přidej ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Ještě v 19. století odpůrci vlakové dopravy věřili, že pokud by se člověk ve vlaku vzhledem k okolí pohyboval vysokou rychlostí, stálo by ho to život. Konkrétně pokud by rychlost člověka přesáhla 30 mil/h, měl by se daný jedinec podle jejich teorie udusit, což však vyvrátil až experiment. Jak by tato myšlenka vypadala v praxi dnes?

Představme si Usaina Bolta, který běží svou maximální rychlostí ($12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) v protisměru uvnitř vlaku TGV jedoucího rychlostí $320\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Kolikrát je i tak Usainova rychlost vyšší než ona smrtelná rychlost 30 mil/h? Jak rychle by musel běžet, aby zabránil svému domnělému udušení?

Úloha VI.3 ... Eráta sténavá ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Marco a Robert se dostali do neobvyklé situace. Ředitel někdejší Alexandrijské knihovny, jistý Eratosthenés z Kyrény, jim zadal zvláštní úkol. Marca poprosil, aby odkrokoval pěšky 5 000 stadií z Asuánu do Alexandrie nehostinnou pouští (Marco šel celou cestu směrem na sever), zatímco Robert zůstal v Asuánu. V poledne v den letního slunovratu si Robert zapsal, že Slunce osvětluje dno hluboké studny a předměty nevrhají stíny. Marco si měl zapsat, jak dlouhý stín vrhá v poledne maják z Alexandrie na blízkém ostrově Faro, tehdy obdivovaný jako jeden ze sedmi divů světa.

Eratosthenés si původně myslel, že Země není tak velká, a očekával tedy, že když Marco dojde do své destinace, zjistí, že maják vrhá stejně dlouhý stín, jako je vysoký. Kdyby to tak bylo, jak velkou část obvodu zeměkoule by Marco obešel? Jak velký by tedy Země měla obvod v kilometrech?

Marco si ten den v poledne ale všiml, že maják vysoký 430 stop vrhal stín do délky 54 stop, měřeno od základny – Zeměkoule je tedy větší než Eratosthenés očekával. Určete její obvod ve stadiích. Také jej určete v kilometrech, víte-li, že jedno stadium má 160 metrů.
Nápověda: sluneční paprsky dopadají na celou Zemi přibližně rovnoběžně.

Úloha VI.4 ... Pozdvižení v Syrakusách ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Jednoho krásného rána položil syrakuský král Archimédovi na stůl korunu. Nebyl si jist, zda je opravdu zlatá. Archimédes dostal za úkol ověřit, z jakého materiálu je koruna vyrobena, avšak měl ztížené podmínky – korunu nesměl roztavit.

Korunu tedy nejprve zvážil, její hmotnost byla 2,55 kg. Následně Archimédés korunu pověsil na provázek a ponořil do vědra s litrem vody na váze (hmotnost vědra zanedbejte). Tentokrát vodu s korunou navážil na 1,5 kg (koruna se nedotkla dna). Z jakého materiálu byla koruna skutečně vyrobena? Byl král podveden, nebo byl výrobce poctivý?

Uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Úloha VI.5 ... Clevelandské děti ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Na letním táboře děti hrály hru, při které dvojice vybíhaly v intervalech po 5 s z počátečního stanoviště na dvě kolmo umístěná stanoviště ve stejných vzdálenostech $l = l' = 50\,\mathrm{m}$ od počátečního, tam si vzaly lísteček a běžely zpět na počáteční stanoviště. Ačkoliv všechny děti umí běhat rychlostí $c = 2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, ke všeobecnému překvapení doběhl jeden z každé dvojice zpět dříve.

1. Organizátoři zjistili důvod: jedna trasa vede mírně do kopce, zde tedy děti běhají pouze rychlostí $c' = 2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na jakou vzdálenost musí trasu do kopce změnit, aby se potkala vždy nějaká dvojice a stanoviště se posouvalo co nejméně? Na jakou vzdálenost se musí stanoviště posunout, aby se setkala původní dvojice?

2. Ve druhé fázi se hra přesunula na louku, kde opět všechny děti běhaly rychlostí c. Naneštěstí začal ve směru jedné trasy foukat vítr, který jim po obou směrech měnil rychlost o $v = 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Kolikrát déle trvala dětem tato cesta? Výsledek vyjádřete nejdříve obecně a až poté dosaďte číselné hodnoty.

3. Vítr však (jakožto boční) ovlivnil i děti běhající kolmo k němu. Kolikrát déle trvala cesta těmto dětem? Setkají se na startovním stanovišti i v tomto případě?

Poznámka: Podobně jako děti běhající ve větru se chová i světlo. Světelné vlny cestují ve všech prostředích konečnou rychlostí, a proto v některých experimentech (např. v Michelson-Morleyově) dochází k tzv. *interferenci.* Zjištění, že světlo interferuje stále stejně nezávisle na podmínkách (ne jako naše děti) vedlo k velké revoluci ve vnímání fyziků a např. i k zavedení speciální teorie relativity.

Úloha VI.E ... Bazenón ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Jak je možné, že šíp v každém okamžiku stojí, ale ve všech okamžicích naráz letí? Rozřešení tohoto paradoxu (a tedy vyvrácení neexistence pohybu) přinesl kromě jiných Gottfried Leibniz. Ten postuloval existenci jakési „vis viva“, neboli živoucí síly, která by dodávala tělesům schopnost se pohybovat. Tuto živou sílu dnes nazýváme kinetická energie a stala se jednou z rudimentárních fyzikálních pomůcek.

Zenón, který paradox se šípem zformuloval, ale netušil, že rychlost některých předmětů můžeme určit i zastavíme-li čas. To můžeme vidět ve Výfučtení této série, kde můžeme pomocí rovnice kontinuity vypočítat rychlost vody v vytékající z vodovodního kohoutku podle vzorce

$$v = \sqrt{\frac{2ghS_1^2}{S_0^2 - S_1^2}}\,,$$

kde g je tíhové zrychlení, S_0 je průřez otvoru kohoutku a S_1 je plocha průřezu vodního proudu měřená ve vzdálenosti h od výtoku. Tento vzorec bychom opravdu mohli využít k měření např. z fotky vodního proudu. Změřte tedy touto metodou, jaký je výtok Q (v litrech vody za minutu) vašeho vodovodního kohoutku. Tuto veličinu změřte také přímo, tedy tak, že shromáždíte vyteklou vodu a zapíšete čas, za který vytekla. Výsledky porovnejte. Jak přesný je uvedený vzorec (snažte se přesnost vyjádřit číselně)? Co mohly být zdroje nepřesností?

Úloha VI.V ... zahradní ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček našel zahradní hadici o průřezu S_0. Zvedl ji do výšky h tak, aby byl výstupní otvor hadice vodorovně se zemí, a pustil jí proud vody s neznámou rychlostí v_0. Zjistil, že voda dostříkla do vzdálenosti l. Poté packou zakryl část hubice a voda dostříkla do čtyřikrát větší vzdálenosti.

1. Jakou část hubice Výfuček zakryl? Jaká část by musela být odkryta, aby voda dostříkla 10krát dále než původně? Vodu uvažujme jako ideální kapalinu.

2. Po těchto pokusech žíznivý Výfuček obrátil hubici k nebi, načež se podivil, jak dlouho se k němu kapky vody vracely. Zvědavý však chtěl zkusit prodloužit tento čas a zadní packou ještě hadici stlačil, a zvýšil tak tlak u hubice o $\Delta p'$. Do jaké výšky H nad zemí voda vystoupala? Výfuček s hadicí nehnul žádným jiným způsobem.

Výfučtení: Hydrodynamika aneb Hydročtení II

V Hydročtení[4] z třetího ročníku jsme se zabývali tzv. *hydrostatikou* neboli chováním stojících kapalin; toto Výfučtení končilo tím, že o *hydrodynamice*, chování pohybujících se kapalin, napíšeme později. Zmíněný moment nadešel, Hydročtení II je zde. Byť se obě Výfučtení týkají tekutin, není nutné číst předem první díl – obě disciplíny jsou vcelku odlišné.

Než začneme, jaké využití vlastně hydrodynamika má?

- energetika a chemický průmysl – návrh potrubí, čerpadel aj.,
- výzkum cirkulace v oceánech,
- návrh plavidel,
- zkoumání pohybu látek v organismech (např. krve v medicíně)...

A jaký popis hledáme? Jako obvykle ve fyzice – co nejjednodušší a zároveň univerzální (abychom jím popsali celou řadu problémů).[5] Dejme se do toho!

Úvodem

Budeme tedy mluvit o hydrodynamice – součásti fyziky zabývající se pohybem kapalin. Ta společně s aerodynamikou (prouděním plynů) tvoří vědní obor dynamika tekutin. Přidáme-li k dynamice tekutin i dynamiku deformovatelných pevných látek,[6] mluvíme o dynamice kontinua (spojitého prostředí).

Spojitým chceme říct, že hmota je souvislá, můžeme ji libovolně dělit. Správně namítnete, že to není pravda – přece existují atomy – nicméně soustředit se zvlášť na každou částici by bylo nejen nemožné – ale taky zbytečné. Při tak obrovském počtu částic se uvažováním spojitosti nedopouštíme prakticky žádné chyby a s kontinuem umíme lépe pracovat. Co víc, v některých případech za kontinuum považujeme i materiály s většími částicemi – typu písek nebo mouka.

Na druhou stranu, uvažujeme-li deformovatelná tělesa, může existovat situace, kdy by i pevná látka působením sil dostala tvar podle nádoby (ovšem působící síla by musela být velmi velká). Správné kritérium pro rozlišení mezi pevnou látkou a tekutinou je, že u pevné látky existuje rozsah sil, ve kterém je deformace elastická, zatímco tekutiny se při působení síly deformují nevratně. Míru tekutosti nějakého tělesa určuje tzv. *viskozita*, kterou se budeme zabývat na konci Výfučtení.

Modely kapaliny

Představme si nějaký hydrodynamický jev, třeba když pádlujeme a jednou se opřeme pádlem do vody a vytvoří se vír. Dokážeme předpovědět, jak budou vzniklé víry a proudění vypadat?

Podle Newtona máme k dispozici pohybové rovnice. Mohlo by nás tedy napadnout, že vezmeme pádlo jako jedno těleso, na které působí vnější síla našich paží, a pak vezmeme jednotlivé

[4] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`

[5] Zkušenější z vás si nejspíš všimli, že jednoduchost a univerzálnost fyzikálního popisu spolu souvisí – kdybychom začali do modelu přidávat hodně parametrů, veličin apod., pravděpodobně bychom jej nebyli schopni použít na popis vícera jevů. Naopak vyberme pár veličin a pro ty napišme jednoduché vztahy – často vyjadřující vlastnosti naprosto triviální. Principu upřednostňování jednoduchého se někdy říká Occamova břitva.

[6] Více o deformacích se můžete dočíst ve Výfučtení `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/vyfucteni/vyfucteni_3.pdf`

atomy vody jako zbylá tělesa. Napíšeme si Newtonovy zákony, můžeme rovnice vyřešit a zjistíme, jak budou víry vypadat.

Postup s Newtonovým zákonem asi není zrealizovatelný, protože nedokážeme zjistit ani počáteční polohu všech atomů. Je ale cenný v tom, že nám ukazuje jednu dobrou věc: vzhledem k tomu, že Newtonovy rovnice mají jedno řešení, teoreticky by mělo být možné pohyb předpovědět. Známe přeci gravitační zrychlení, parametry pádla, všechny okrajové podmínky atp.

Zkusme ale jiný postup: pádlo pořád bereme jako těleso, ale místo atomů počítáme s myšlenými malými krychličkami vody. To už je představitelnější, malé krychličky si lze lépe představit. Nyní se nám otevírají dvě cesty. Buď pomocí matematických metod uvažujeme, že objem krychliček je nekonečně malý. Pak by *snad* chyba způsobená touto úvahou byla taktéž nekonečně malá, a to je dobře. Tímto bychom obdrželi tzv. *Navier-Stokesovy rovnice.* Druhý způsob spočívá v tom, že necháme krychličky mít nějakou konečnou velikost (třeba $1\,\mathrm{mm}^3$) a necháme počítač spočítat pohyb. Dostaneme nepřesný výsledek, ale zase ho za nás může spočítat počítač.

Nevýhoda Navier-Stokesových rovnic spočívá v tom, že je velmi těžké je vyřešit, v některých případech ani není možné napsat jejich řešení na papír (víme, že řešení existuje, ale neumíme ho lehce popsat) – o tom více níže. Nevýhoda počítačové metody zase nespočívá ani tak v nepřenosti – ukazuje se, že jeho modely fungují. Problém však je, že jeho výpočty trvají dlouho a i tak není jednoduché napsat dobrý výpočetní, resp. simulační program.

Nabízí se ještě třetí možnost – řekneme si, že úkol je moc těžký a spočítáme jen něco. Nebudeme se tedy snažit popsat přesně celý vývoj, ale jen některé veličiny, např. tlak a průtok. Taky učiníme některé idealizace, třeba že kapalinu nelze stlačit. Speciálně zavedeme pojem *ideální kapalina.* Tou budeme rozumět kapalinu, která není stlačitelná a nedochází v ní k žádnému tření. Reálně neexistuje, ale mnoho kapalin je jí velmi podobných.

Dále se vydáme třetí cestou (popíšeme jen něco), dvě cesty výše jsme popsali spíše pro zajímavost.

Dodatek: proč je těžké vyřešit Navier-Stokesovy rovnice

Určitě jste se ve škole již setkali s rovnicemi, ale vždycky jste je vyřešili. Jak se může stát, že existuje rovnice, kterou je tak těžké řešit? Je to totiž jiný typ rovnice, než který se řeší na základních a středních školách. Zatímco pro vás je řešením rovnice obvykle jedno číslo x či v soustavě rovnic několik čísel, Navier-Stokesova rovnice dává jako výsledek polohu částic v čase. Musíme tedy pro každou částici dostat její funkci $x(t)$ – asi si dovedete představit, že je těžší hledat funkci než číslo. A těchto částic (funkcí, které hledáme) je nekonečno.

Snad si nyní dokážete představit, proč je těžké spočítat pohyb tekutin. Jedná se dokonce o jeden z tzv. problémů tisíciletí, na který ani nejlepší fyzici neznají úplnou odpověď.

Rovnice kontinuity

Asi každý při hraní si se zahradní hadicí zjistil, že částečné zakrytí hubice zvýší rychlost stříkající vody. Tento jev jde vysvětlit pomocí rovnice kontinuity. Jelikož počítáme s tím, že voda je ideální kapalina, tudíž nestlačitelná, musí v každém průřezu potrubí za čas Δt projít objem vody ΔV. Pokud se v průběhu toku mění obsah průřezu S, můžeme objem rozepsat jako $\Delta V = S\Delta x =$

$= Sv\Delta t$, kde Δx je vzdálenost, kterou voda urazí za čas Δt rychlostí v. Pro dva různé úseky o různých průřezech S_1 a S_2, ve kterých teče voda rychlostí v_1 a v_2, platí rovnost

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t\,,$$
$$S_1 v_1 = S_2 v_2\,. \qquad (1)$$

Takto se nám podařilo odvodit *rovnici kontinuity.* Jinými slovy říká, že v každé části potrubí se zachovává součin obsahu průřezu a rychlosti vody v daném místě, této konstantní veličině se říká objemový tok q_V a má jednotku $[q_V] = \mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}} = \mathrm{m^3/s}$. Pomocí rovnice kontinuity lze vypočítat rychlost vody stříkající ze zakryté zahradní hadice nebo vody vytékající z vodovodního kohoutku.

Máme-li potrubí o poloměru r, které se následně zúží na poloviční poloměr $r' = 0{,}5r$, bude pro výslednou rychlost v' platit

$$\pi r^2 v = \pi r'^2 v' = \pi \frac{r^2}{4} v'\,,$$
$$v' = 4v\,,$$

tedy voda tímto místem poteče 4krát rychleji. Je zřejmé, že čím tenčí bude potrubí, tím větší rychlost bude mít voda uvnitř – což se shoduje s naší zkušeností se zahradní hadicí.

Můžeme se ptát – existují i zobecnění rovnice kontinuity? Určitě by měly, neboť i sebepodivnější (i stlačitelná) hmota nemůže jen tak zmizet.[7] Dokonce existuje univerzální tvar, který bude více či méně očekávaně vyskakovat v různých oblastech fyziky. Ten je však matematicky výrazně složitější. Proto jej nechme stranou a téměř zadarmo rozšiřme pomocí hustoty kapaliny ϱ (ta může být proměnlivá) na tvar (1):

$$\varrho S v = \text{konst.}\,,$$

který platí i pro stlačitelné kapaliny a říká, že se zachovává hmotnostní tok (kilogramy za sekundu).

Bernoulliho rovnice

Pro obecnější popis proudu kapaliny, ale i tekutiny, se používá Bernoulliho rovnice. Ta popisuje energii kapaliny pro různou výšku h, rychlost v a tlak p kapaliny v různých částech toku. Její základní tvar je

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = \text{konst.}\,, \qquad (2)$$

neboli součet tří členů výše je ve všech místech kapaliny stejný, tento součet se zachovává. Jestli vám tento princip připomíná zákon zachování energie, jste na správné stopě, tento zákon funguje podobně. Než si vysvětlíme původ rovnice, ukažme si, jak se používá.

Rovnice je vlastně zákon zachování energie pro různá místa toku ideální kapaliny. Používáme ji tak, že potřebujeme-li znát nějakou z vystupujících veličin v určitém místě (např. výtoková rychlost v_1 kapaliny z nádoby) a známe ostatní veličiny v tomto bodě (tlak p_1, výšku h_1 a hustotu ϱ), najdeme si jiný, „referenční“ bod v kapalině (např. bod na volné hladině, kde

[7] Úvahy o anihilaci ponechme jiným Výfučtením.

známe tlak p_2, rychlost v_2, výšku h_2 a hustotu ϱ) a napíšeme si Bernoulliho rovnici mezi těmito dvěma body

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \,.$$

Z této rovnice už umíme vyjádřit hledanou rychlost v_1.

Ukažme si ještě, jak jednotlivé členy souvisí se zákonem zachování energie. Kdybychom měli kapalinu známého objemu V, mohli bychom její kinetickou a potenciální energii rozepsat stejně, jako v mechanice hmotného bodu nebo tuhého tělesa, tj.

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \,,$$
$$E_\mathrm{p} = mgh \,.$$

Tyto veličiny závisí na objemu, protože $m = \varrho V$. Této závislosti se chceme zbavit, protože objem se u stlačitelných kapalin může měnit a ostatní veličiny se mohou měnit v různých bodech objemu. Závislosti se zbavíme tak, že vztahy vydělíme objemem

$$e_\mathrm{k} = \frac{E_\mathrm{k}}{V} = \frac{1}{2}\varrho v^2 \,,$$
$$e_\mathrm{p} = \frac{E_\mathrm{p}}{V} = \varrho g h \,.$$

Takto vzniklé veličiny nazýváme měrné (měrná kinetická energie a měrná potenciální energie) a obvykle značíme malými písmeny.

Může docházet k výměně energie ještě jinak? Obecně může, a to přenosem tepla nebo konáním práce.[8] První neuvažujeme. Konání mechanické práce zohledňují členy za kinetickou a potenciální energii. Jenže to není vše, ještě tady máme tlak. Tlaková energie se vypočte jako

$$E_\mathrm{tl} = pV \,.$$

Proč tomu tak je? Přesvědčme se tím, že ukážeme, že změna této veličiny odpovídá vykonané práci. Představme si třeba, že nějaká kapalina tlačí na píst o ploše S, je v ní tlak p a změní svůj objem. Pak platí:

$$\Delta E_\mathrm{V} = F(x_2 - x_1) = \frac{F}{S}(Sx_2 - Sx_1) = p(V_2 - V_1) \,,$$

kde jsme využili definici tlaku (tlak je síla působící kolmo na jednotkovou plochu) a objem jsme rozepsali jako objem kvádru s obsahem podstavy S a výškou x. To je tzv. objemová práce a odpovídá např. práci hydraulického zvedáku.

Obdobně při změně tlaku dochází ke změně

$$\Delta E_\mathrm{tl} = V\ (p_2 - p_1) \,,$$

což je tzv. tlaková práce, kterou koná např. čerpadlo.

Ukázali jsme si tedy, že všechny tři členy v Bernoulliho rovnici mají význam energie. Tato rovnice tak vskutku vyjadřuje známý zákon zachování energie pro kapaliny.

[8] Tak praví 1. princip termodynamický.

Aplikace hydrodynamiky

Hydrodynamický paradox

Zajímavý důsledek Bernoulliho rovnice je tzv. hydrodynamický paradox. Pokud bychom dali dva listy papíru k sobě a foukli mezi ně brčkem, očekávali bychom, že se listy od sebe oddálí, ale ejhle – papíry se k sobě přitiskly (to si můžete sami zkusit). Pojďme si tuto záhadu osvětlit s pomocí Bernoulliho rovnice.

Konstanta na pravé straně rovnice (2) nám říká, že zvětší-li se jeden člen, musí se úměrně tomu zmenšit jiný. Pro vodorovné proudění můžeme odečíst člen za potenciální energii tíhovou a dostáváme, že

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \text{konst.}$$

To říká, že zvýší-li se rychlost, dojde k poklesu tlaku. Tomu se říká hydrodynamický paradox, protože na první pohled se to může zdát nelogické. Foukneme-li vzduch mezi papíry, mohli bychom čekat, že proudící vzduch bude mít snahu „udělat si místo“. Z Bernoulliho rovnice však víme, že jeho tlak bude nižší než tlak okolní atmosféry (protože ta je v klidu). Rozdíl tlaků pak vyvolá sílu, která přitiskne papíry k sobě.

Tentýž jev je možno pozorovat i v zužujícím se potrubí. Zmenší-li se průměr, dojde ke snížení tlaku, i když bychom mohli čekat, že bude mít proud „natlačený“ do menšího potrubí tlak větší. Z rovnice kontinuity však musí platit $v_1 S_1 = v_2 S_2$. To v souladu s Bernoulliho rovnicí způsobí pokles tlaku na $p_2 < p_1$.

Rychlost toku z kohoutku

Nyní se podíváme na složitější případ s vodou z kohoutku, kdy nás bude zajímat, jakou rychlostí voda vytéká. Právě když voda vytéká z kohoutku, má průřez S_0 a má rychlost v_0. Obsah S_0 můžeme určit celkem jednoduše: můžeme např. změřit průměr proudu vody d_0 pravítkem a z něj S_0 dopočítat. Rychlost vody takto jednoduše neurčíme a místo toho změříme obsah průřezu vody S_1 ve vzdálenosti h od místa výtoku. V tomto místě má voda rychlost v_1 a tu dokážeme odvodit pomocí předešlých veličin. Použijeme-li Bernoulliho rovnici

$$p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 + \varrho g h_0 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1\,,$$

můžeme udělat několik předpokladů. Proud vody se nachází v prostředí s konstantním atmosférickým tlakem $p_a = p_0 = p_1$, tudíž se oba členy navzájem vyruší. Určíme-li hladinu nulové energie v místě měření druhého průřezu, tedy vzdálenosti $h_0 = h$ od ústí, bude mít voda v tomto místě nulovou potenciální energii a člen vypadne. Poslední úpravou bude vydělení celé rovnice hustotou vody ϱ, jelikož je v každém místě stejná. Pro jednoduchost se zbavíme zlomků vynásobením dvěma a získáme tvar

$$v_0^2 + 2gh = v_1^2\,.$$

Z rovnice kontinuity poté plyne

$$\begin{aligned} S_0 v_0 &= S_1 v_1\,,\\ S_0 v_0 &= S_1\sqrt{v_0^2 + 2gh}\,,\\ v_0 &= \sqrt{\frac{2ghS_1^2}{S_0^2 - S_1^2}}\,. \end{aligned}$$

Jinak složitý úkol, měření rychlosti vody, jde jednoduše určit změřením obsahu průřezu vody u ústí a poté v určité vzdálenosti od něj.

Bonus: Viskozita

Spousta zajímavých jevů, které můžeme pozorovat i doma, souvisí s viskozitou neboli vnitřním třením tekutin. Protože jejich popis přesahuje rámec tohoto textu, připojujeme pod čarou odkazy na zajímavá videa.

První video[9] je známý pokus se škrobem a vodou. Dobře ukazuje, že jednotlivé kapaliny se liší nejen velikostí vnitřního tření, ale také způsobem, jak reagují na deformace. Ovládáte-li angličtinu (případně máte-li někoho, kdo umí překládat), doporučujeme brilantní video o podivném chování kečupu.[10]

Poslední video[11] demonstruje tři jevy. První z nich souvisí s napětím v polymerech (látky tvořené velkými molekulami, řádově stovky i více atomů). Druhý jev nastává, pokud se kapalina chová natolik pružně, že výslednice sil působící na rotující kapalinu směřuje dovnitř. Poslední jev je opakem chování škrobu. Dopadající proud má malou viskozitu a dopadá na hladinu, která je velmi tuhá. Díky tomu je možné, aby se proud po dopadu ohnul a odletěl pryč. Pro estetický dojem přidáváme Kayeho efekt zpomaleně.[12]

Závěr

V tomto Výfučtení jsme si pověděli něco málo o vlastnostech kapalin a popsali některé důležité jevy a zákony. Z nich jsou nejpodstatnější rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice, které tvoří základní nástroj ke zkoumání hydrodynamických jevů.

Množství zajímavých jevů jsme zde kvůli jejich náročnosti nemohli řádně popsat, ale i přesto věříme, že vám text poskytl základní přehled o tom, s čím se můžeme potkat.

Hydrodynamika je velmi rozsáhlý obor, a proto není potřeba zoufat, pokud máte spoustu nezodpovězených otázek. Vždycky můžete napsat organizátorům nebo hledat na internetu[13] či v knihovně.

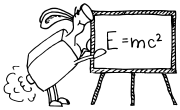
Pokud se rozhodnete studovat fyziku nebo některý z přírodovědných či technických oborů, ještě se s hydrodynamikou setkáte – proudění krve v medicíně a příbuzných oborech, pohyb zemin a pohyb vod v oceánech, sdílení tepla, či obtékání v technických oborech. Do té doby dostanete silnější matematické nástroje, které spoustu věcí zjednoduší a poskytnou jiný pohled na věc.

Do té doby přejeme hlavně zdraví a také hodně úspěchů ve všem, co vás baví.

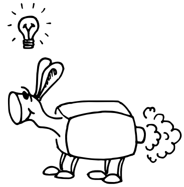
Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Matěj Rzehulka
matej@vyfuk.mff.cuni.cz

[9] https://youtu.be/CU2zoB69X1g
[10] https://youtu.be/KB43fM_ozKQ
[11] https://youtu.be/nX6GxoiCneY
[12] https://youtu.be/GX4_3cV_3Mw
[13] Díky řadě experimentů existuje i spousta videí o této problematice, drobný problém může být častá absence českého překladu.



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Demokratický výlet do přírody

5 bodů; průměr 3,63; řešilo 19 studentů

Albert, Norbert, Herbert a Dagobert se vydali na výlet do přírody. Tato soudržná skupina kamarádů má však bohužel na spoustu věcí odlišné názory, a tak vždycky, když se měli rozhodnout, kterou ze dvou cest se vydat, hlasovali.

Zatímco Norbertovi, Herbertovi a Dagobertovi tenhle způsob rozhodování připadal dobrý, Albert měl pocit, že se hodně často může stát, že se neshodnou, neboť výsledek hlasování bude 2:2. Čas však ukázal, že ve skutečnosti byl mnohem častější výsledek 3:1.

Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že se čtyři kamarádi rozhodnou v poměru 3:1, jestliže vybírají mezi dvěma volbami a každý z nich vybírá nezávisle. Pravděpodobnost konkrétního případu je v této situaci podíl onoho konkrétního případu a všech možných případů. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodnou v poměru 2:2? Co je pravděpodobnější?

Každému z hochů můžeme přiřadit hodnotu jeho rozhodnutí – pokud se rozhodne pro první možnost, přiřadíme mu hodnotu 0, pokud pro druhou, přiřadíme mu hodnotu 1. Další možnost neexistuje, neboť se rozhodují pouze mezi dvěma cestami.

Nyní si můžeme vypsat všechny možnosti, jak mohlo rozhodování dopadnout, a jednoduše spočítat, kolikrát nastala možnost 3:1 a kolikrát možnost 2:2. Pojďme to tedy udělat. Nejjednodušší bude, pokud si výsledky rozhodování zaneseme do tabulky, abychom na žádný z případů nezapomněli. Asi netřeba upozorňovat, že v zadání úlohy jsme výsledkem 3:1 mysleli takový, kdy se 3 hlasy rozhodnou pro stejnou možnost nezávisle na tom, zda se jedná o tu první, či druhou.

Postupujeme tak, že začneme kombinací čtyř nul a následně měníme číslici co nejvíce vpravo s podmínkou, že nesmíme dosáhnout výsledku, který jsme již měli. Takto zajistíme zanesení všech kombinací.

Výsledek rozhodování je dán počtem stejných číslic v jednom řádku ku počtu druhých stejných číslic v tom samém řádku, přičemž větší číslo píšeme jako první. Například rozhodnutí 0100 tak dopadlo v poměru 3:1, neboť tři kluci zvolili možnost 0 a jeden z kluků zvolil možnost 1. Ze stejných důvodů hlasování 1011 dopadlo taktéž v poměru 3:1.

Z celkového počtu různých rozhodování (tj. počet řádků v tabulce, čili 16) jich dopadlo 8 v poměru 3:1, zatímco jen 6 jich dopadlo v poměru 2:2.

Pravděpodobnost P_{31}, že rozhodování dopadne v poměru 3:1 je tedy počet případů ku celkovému počtu rozhodnutí, takže

$$P_{31} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\,\%\,.$$

Obdobně pravděpodobnost P_{22}, že rozhodování dopadne v poměru 2:2, je

$$P_{22} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 37{,}5\,\%\,.$$

A	N	H	D	Výsledek
0	0	0	0	4:0
0	0	0	1	3:1
0	0	1	0	3:1
0	0	1	1	2:2
0	1	0	0	3:1
0	1	0	1	2:2
0	1	1	0	2:2
0	1	1	1	3:1
1	0	0	0	3:1
1	0	0	1	2:2
1	0	1	0	2:2
1	0	1	1	3:1
1	1	0	0	2:2
1	1	0	1	3:1
1	1	1	0	3:1
1	1	1	1	4:0

Tab. 1: Výsledky rozhodování kluků, které označujeme jejich počátečním písmenem.

Vidíme tedy, že zatímco rozhodnutí 3:1 nastane v polovině případů, rozhodnutí 2:2 nastane jen o něco více než ve třetině případů (přesněji v $P_{22} = 37{,}5\,\%$ případů).

A co kdyby bylo kluků více?

Při vyplňování tabulky jsme si mohli všimnout, že jsme vypsali všechna možná čtyřciferná čísla v binární soustavě (zápis tohoto čísla se skládá pouze z jedniček a nul). Je to dáno tím, že každý z kluků se rozhoduje nezávisle, takže nastanou všechny možné kombinace jejich rozhodnutí (kterých bude 2^n, kde n je počet kluků).

Pro větší počet kluků bychom tedy postupovali úplně stejně, akorát by naše tabulka byla rozměrnější. Mohli bychom taktéž využít nějakého programu, který by množství jedniček a nul počítal za nás.

Robert Gemrot
`robert@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.2 . . . Traktor

6 bodů; průměr 4,05; řešilo 55 studentů

Jede traktor, je to Zetor, jede do hor, orat brambor. . . Klasický příběh, který všichni známe. Stihne mládenec práci, i když jeho kumpáni přijdou pozdě?

Normálně zvládnou ve dvanácti lidech práci za čistých 24 hodin a dostanou za ni všichni dohromady poctivých 12krát 2 400 Kč. Nyní ale mládenec pracuje na poli samotný, jelikož všichni jeho kumpáni poněkud zaspali. Proto zavolá jednomu z nich, který za hodinu přijde. Jakmile přijde, tak každý[14] *zavolá jednomu*

[14]tedy oba dva

jinému kamarádovi. Ti následně za hodinu přijdou. Proces se takto opakuje a pole má neomezenou kapacitu pracovníků. Kdy dokončí svoji práci? Kolik peněz dostane náš mládenec, když se rozdělí spravedlivě podle vykonané práce, a když se peníze rozdělí stejně mezi všemi, kteří vykonali nějakou práci?

Nejprve je důležité si spočítat, jakou část pole stihne zorat 1 člověk za 1 hodinu. Pokud za 24 hodin stihne 12 lidí celé pole, pak 1 člověk stihne za 24 hodin 1/12 pole a za 1 hodinu 1/288 pole.

Abychom nemuseli počítat se zlomky, je důležité si uvědomit, že 1 hodina práce 1 člověka vždy odpovídá 1/288 pole a ve stejném poměru musí být také spravedlivě odměněna, tedy člověk za ni dostane $12 \cdot 2\,400 \cdot (1/288) = 100\,\text{Kč}$.

Dále už můžeme postupovat velmi snadno. Během první hodiny bude jeden člověk odměněn částkou 100 Kč, celkem bude odvedena práce za 100 Kč. Během druhé hodiny budou dva lidé odměněni částkou 200 Kč, celkem bude odvedena práce za 300 Kč. Nyní budeme sčítat hodinové odměny, tak, aby nepřevyšovaly celkovou částku za celé pole, která činí $12 \cdot 2\,400\,\text{Kč} = 28\,800\,\text{Kč}$

$$100\,\text{Kč} + 200\,\text{Kč} + 400\,\text{Kč} + 800\,\text{Kč} + 1\,600\,\text{Kč} + 3\,200\,\text{Kč} + 6\,400\,\text{Kč} + 12\,800\,\text{Kč} = 25\,500\,\text{Kč}\,.$$

Zjistili jsme, že práce bude dokončena před devátou hodinou. Touto dobou zde bude již 256 pracovníků s úkolem stihnout $(25\,500 - 28\,800)\,\text{Kč}/28\,800\,\text{Kč} = 33/288$ pole, což se jim rychlostí 256/288 pole za hodinu podaří za 33/256 hodiny, tedy asi za 7 minut a 44 sekund.

Zbývá odpovědět na všechny otázky v zadání. Práce bude dokončena asi za 8 hodin, 7 minut a 44 sekund. Pokud budou odměněni spravedlivě hodinovou mzdou 100 Kč, náš mládenec dostane asi $(800 + (33/256) \cdot 100)\,\text{Kč} \cdot 813\,\text{Kč}$. Pokud se však odměna rozdělí mezi všechny, kteří vykonali nějakou práci, tedy i mezi 128 lidí, kteří pracovali pouze necelých 8 minut, na našeho mládence zbyde jen $12 \cdot (2\,400/256)\,\text{Kč} \doteq 113\,\text{Kč}$.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Bufet v Burdž Chalífě

6 bodů; průměr 4,22; řešilo 40 studentů

Lubor jednou dostal hlad, tak si šel dát k svačině párek v rohlíku, který po strávení uvolní $E = 263\,\text{kcal}$ *(kilokalorií). Je ovšem ve vysoké budově a bufet je až v přízemí. Když si tedy párek koupí, ale zároveň musí vyšlapat schody do výšky* H*, říká si, jestli se mu to energeticky vůbec vyplatí.*

Uvažujte, že Lubor váží $m = 60\,\text{kg}$*, stoupá průměrně o* $5\,\text{m}$ *za minutu a průměrně spálí* $6\,000\,\text{kJ}$ *denně jenom tím, že dýchá a udržuje tělesnou teplotu. S jakou účinností (v procentech) přeměňuje energii z párku v rohlíku ve svou potenciální energii, pokud se cestou do schodů zadýchá, a má tak o* $10\,\%$ *vyšší spotřebu, než kdyby jenom ležel? Jak vysoká by musela budova být, aby se mu to nevyplatilo?*

Získanou energii E z párku v rohlíku Lubor rozdělí při stoupání po schodech mezi dvě činnosti: na získání potenciální energie E_1 (stoupání do výšky) a udržování životních funkcí E_2. Pro výpočet si proto musíme obě energie vyjádřit.

Pro potenciální energii E_1 platí vzorec

$$E_1 = mgH\,,$$

kde m je Luborova hmotnost, H dosažená výška a g tíhové zrychlení.

Vyjádření energie E_2 ovšem musíme rozdělit do více kroků. Víme, že Luborovo tělo má výkon $P_0 = 6\,000\,\mathrm{kJ{\cdot}den^{-1}}$, přičemž výkon, který potřebuje pro stoupání, je o 10 % větší, neboli $P = 1{,}1P_0$.

Tímto výkonem ze sebe vydá energii E_2 během času t, pro který platí $t = H/v$, kde $v = 5\,\mathrm{m{\cdot}min^{-1}}$ je rychlost stoupání, neboť počítáme s tím, že Lubor stoupá rovnoměrnou rychlostí nahoru (můžeme tak použít vzorec pro rovnoměrný přímočarý pohyb). Tím pádem můžeme zapsat E_2 jako

$$E_2 = Pt = 1{,}1P_0\frac{H}{v}\,.$$

Po zkombinování těchto dvou zjištěných energií dostáváme vztah pro E:

$$E = E_1 + E_2 = mgH + 1{,}1P_0\frac{H}{v}\,,$$

ze kterého si můžeme odvodit výšku H jako

$$E = H\left(mg + \frac{1{,}1P_0}{v}\right)\,,$$
$$H = \frac{E}{mg + \dfrac{1{,}1P_0}{v}}\,.$$

Zjištění výšky H, do které Lubor vystoupá s energií z párku, je nyní už jen otázka dosazení hodnot. Nesmíme ale zapomínat na dosazení jednotlivých veličin ve správných jednotkách.

Vztah mezi kaloriemi a jouly, které ve fyzice používáme, je $1\,\mathrm{kcal} = 4\,186\,\mathrm{J}$ (jedna kilokalorie totiž odpovídá energii potřebné k ohřátí jednoho kilogramu vody o jeden stupeň Celsia). Z toho platí $E = 263 \cdot 4\,186\,\mathrm{J}$.

Převody výkonu a rychlosti si jsou velice podobné. V obou situacích nemáme pouze správný (jednotný[15]) čas. Pro jednoduchost převedeme oba děje na sekundy. V případě výkonu se jedná o převedení dne na sekundy, proto musíme jeho hodnotu vydělit[16] počtem sekund v jednom dni, neboli $P = 6 \cdot 10^6/86\,400\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

U rychlosti je to podobné, minuty musíme převést na sekundy, čili $v = 5/60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Dosazením hodnot do rovnice získáváme

$$H = \frac{263 \cdot 4\,186\,\mathrm{J}}{60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} + \dfrac{1{,}1 \cdot 6 \cdot 10^6/86\,400\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}}{5/60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}}\,,$$
$$H \doteq 731\,\mathrm{m}\,.$$

Luborovi se tedy nevyplatí dojít si pro párek v rohlíku, pokud je budova vyšší než $H \doteq 730\,\mathrm{m}$ (výsledek výše s více platnými ciframi používáme na další výpočet, tento výsledek považujeme za finální, poněvadž se zadanými hodnotami si můžeme dovolit pouze přesnost maximálně dvou platných cifer).

[15] V tomto případě (a mnohých jiných) není nutné převádět veličiny na základní jednotky, protože se jednotky času ve vzorci zkrátí. Proto je ale potřeba je převést na stejnou jednotku, ať už je jakákoliv.

[16] Pokud někdy váháte, jestli dělit nebo násobit, představte si, co vlastně počítáte. Za den Lubor spálí velké množství energie, takže za sekundu ji musí spálit méně, tudíž musíme dělit počtem sekund.

Účinnost pak vypočítáme jako podíl nutně potřebné energie k vystoupání (tedy pouze potenciální energie) a celkově spotřebované energie, tedy

$$\eta = \frac{E_1}{E_1 + E_2} = \frac{mgH}{H\left(mg + \dfrac{1{,}1P_0}{v}\right)}\,,$$

$$\eta = \frac{mg}{mg + \dfrac{1{,}1P_0}{v}}\,,$$

$$\eta = \frac{60\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{60\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} + \dfrac{1{,}1\cdot 6\cdot 10^6/86\,400\,\mathrm{J\cdot s^{-1}}}{5/60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}}\,,$$

$$\eta \doteq 39\,\%\,.$$

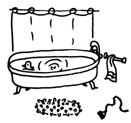
Všimněme si, že nám účinnost vyšla nezávisle na výšce, do které Lubor stoupá. To je dobře, neboť účinnost přeměny energie musí mít pořád stejnou hodnotu, ať už jde do prvního či stého patra (ovšem pokud by byl Lubor například více unavený, čím více schodů by vyšel, tak by situace byla jiná – to ale naštěstí není náš případ).

Lubor tedy přeměňuje energii z párku na svou potenciální energii s účinností $\eta \doteq 39\,\%$.

Adam Krška
`adam@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.4 ... Vítečná koupel

6 bodů; průměr 4,63; řešilo 30 studentů



Když si jednoho dne Vítek napustil vanu, nedopatřením po napuštění ztratil špunt. Jakou rychlostí začala voda odtékat z Vítkovy vany, jestliže ji měl napuštěnou do výšky $h = 30\,\mathrm{cm}$? Vítek zpanikařil, a tak začal do vany zpětně napouštět vodu s přítokem $Q = 15{,}0\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$. V jaké výšce se voda ve vaně ustálila, jestliže byl obsah odtokového otvoru vany $S = 4{,}0\,\mathrm{cm^2}$?

Pro vyřešení této úlohy vyjdeme ze známého Torricelliho vzorce pro rychlost výtoku kapaliny malým otvorem z nádoby:

$$v_2 = \sqrt{2h_1 g}\,,$$

kde v_2 značí výtokovou rychlost, h_1 hloubku otvoru pod hladinou a g, jak už to bývá, gravitační zrychlení. Zvláštní značení a opodstatnění pro použití tohoto vzorce popíšeme v sekci níže.

Dosadíme-li za výšku $h_1 = h$, získáme výtokovou rychlost

$$v = \sqrt{2\cdot 0{,}3\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \doteq 2{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Voda bude vytékat z vany rychlostí asi $2{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Pokud se má hladina vany ustálit, musí být objem vody, který odtéká, a objem vody, který přitéká, stejný. Pro výtok platí $Q = Sv$, kde S je obsah výtokového otvoru. Bude tedy platit rovnost

$$Q = Sv$$
$$Q = S\sqrt{2h'g}$$
$$h' = \frac{Q^2}{2gS^2}\,.$$

Hladina ve vaně se tedy ustálí ve výšce

$$h' = \frac{\left(2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot (4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2})^2} \doteq 2\,\mathrm{cm}\,.$$

Je tedy vidět, že i při velkém přítoku bude hladina ve výšce pouhých 2 cm.

Původ vzorečku

Ve Výfučtení 6. série, které je vydáno ve stejné brožurce jako toto vzorové řešení, popisujeme význam základní Bernoulliho rovnice ve fyzice kapalin. Z ní můžeme snadno odvodit Torricelliho vzorec, jak si v následujících řádcích zopakujeme.

Bernoulliho rovnice vyjadřuje zákon zachování mechanické energie v kapalinách v závislosti na rychlosti, výšce a tlaku.

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho g h = \text{konst.}$$

Takto vypadá rovnice celkem složitě, a proto si ji trochu rozebereme. Člen $\varrho v^2/2$ udává kinetickou energii kapaliny v závislosti na rychlosti v, $\varrho g h$ potenciální energii v závislosti na výšce h a p je potenciální energie tlaková.[17]

Vidíme, že členy nemají jednotku energie J, ale jednotku tlaku Pa. To je způsobeno tím, že počítáme energii kapaliny vzhledem k jejímu jednotkovému objemu a ne vzhledem k její hmotnosti. Pokud bychom tedy rovnici vynásobili objemem kapaliny V, získali bychom správný rozměr v J.

Jelikož Vítek pozoruje kapalinu ve dvou stavech – klidnou a vytékající z vany, budeme potřebovat rovnice pro energii vody v těchto dvou různých stavech. Díky ZZME[18] budou obě energie v rovnosti. Index pro kapalinu na hladině bude 1 a pro vytékající vodu 2. Rovnice pak je

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 + \varrho g h_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2 + \varrho g h_2\,.$$

Abychom ji zjednodušili, uděláme několik předpokladů. Voda na hladině je klidná, tudíž má nulovou rychlost, a tudíž i nulovou kinetickou energii. Nulová hladina potenciální energie

[17] Počítáme s tlakem vnějšího prostředí, takže nesmíme započítávat hydrostatický tlak samotné vody v nádobě – ten je totiž započten ve třetím členu.

[18] zákon zachování mechanické energie

bude[19] ve výšce výtoku a tlak p v okolí vany bude všude stejný, proto se z obou stran rovnice odečte. Takto nám odpadnou čtyři členy a zůstane

$$\varrho g h_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2\,,$$
$$v_2 = \sqrt{2h_1 g}\,,$$

čímž dostáváme klíčový vztah.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.5 ... Kepler volá domů

7 bodů; průměr 4,65; řešilo 26 studentů

Přátelé Výfuku se rozhodli, že prozkoumají trpasličí planetku UCHO-373. Rozdělili se do dvou skupin, přičemž jedna přistála na povrchu a zjistila, že planetka má poloměr R a hmotnost m, druhá v průzkumném modulu zaujala stabilní kruhovou oběžnou dráhu ve vzdálenosti $3R$ od středu planetky.

- *Načrtněte obrázek oběhu družice a vypočtěte její oběžnou rychlost.*

Výzkumnou misi však přerušil zbloudilý asteroid, který narazil do Výfučího průzkumného modulu. Zpomalil ho natolik, že začal obíhat po elipse tak, že v nejbližším bodě oběhu byl těsně u povrchu planety a v nejvzdálenějším bodě v původní vzdálenosti $3R$ (od jejího středu).

- *Načrtněte obrázek tohoto oběhu a vyznačte hlavní a vedlejší poloosy a ohniska.*

Bohužel se důležité přístroje v modulu nárazem asteroidu rozbily, a tak přátelé Výfuku v modulu neznají svou oběžnou dobu. Naštěstí ti, kteří zůstali na planetce, ví, že ***na obzoru*** *byl výzkumný modul od nich vzdálen $1{,}7R$ a do* ***nadhlavníku*** *potom dorazil za $8{,}0\,\mathrm{h}$. Přátelé Výfuku na planetce se nachází v místě protilehlém bodu, kde modul prolétává nejblíž planetce.*

- *Jak dlouho trval družici jeden oblet? Pro jednoduchost můžete (a nemusíte) předpokládat, že ohnisko je ve středu planety.*

K výpočtu můžete využít fakt, že dle druhého Keplerova zákona[20] je tzv. plošná rychlost (plocha, kterou za čas opíše spojnice modulu a planety) modulu konstantní. Také využijte fakt, že obsah elipsy je roven πab, kde a a b jsou hlavní resp. vedlejší poloosy elipsy.

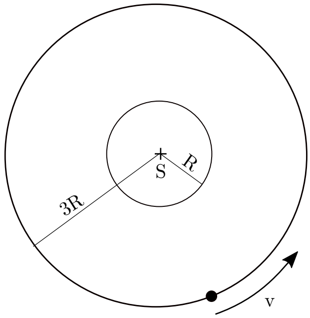
Po zjištění oběžné doby se přátelé Výfuku z planetky opět setkali se zbytkem týmu v modulu a nyní se chtějí vrátit zpátky ke své mateřské lodi, která planetku taktéž obíhá. Bohužel s mateřskou lodí ztratili komunikaci, a tak jen vypozorovali, že její oběžná doba je $48\,\mathrm{h}$. Znají ale všechny Keplerovy zákony, a tak si poradí.

- *Aby modulu na cestě k lodi vystačilo palivo, musí být hlavní poloosa dráhy mateřské lodi kratší než dvojnásobek hlavní poloosy modulu. Dostanou se přátelé Výfuku domů?*

- Náčrtek s vyznačenými údaji můžeme vidět na obrázku 2.

[19] Nulovou hladinu potenciální energie si můžeme zvolit, kde chceme, neboť vždy počítáme rozdíl energií oproti sobě, takže případná konstanta vzniklá jinou volbou nulové hladiny se odečte.

[20] https://cs.wikipedia.org/wiki/Keplerovy_zákony#2._Keplerův_zákon

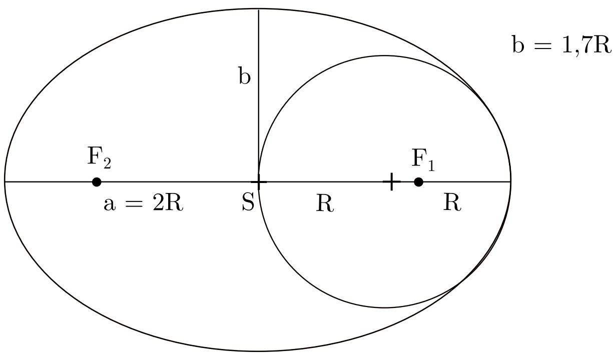


Obr. 2: Původní neporušená kruhová oběžná dráha.

Oběžnou rychlost v družice o hmotnosti M vypočítáme z toho, že dostředivá síla F_o, která působí na družici a způsobuje její pohyb po kružnici o poloměru $3R$, musí být rovna gravitační síle působící mezi družicí a planetkou, jejíž velikost zjistíme z Newtonova zákona, tedy

$$F_o = F_g\,,$$
$$\frac{Mv^2}{3R} = \frac{GmM}{(3R)^2}\,,$$
$$v = \sqrt{\frac{Gm}{3R}}\,.$$

- Náčrtek tohoto nového oběhu můžeme vidět na obrázku 3. Pozn.: hlavní poloosa je úsečka a procházející středem a ohniskem F_1 nebo F_2 (jsou dvě), která končí dotykem elipsy. Vedlejší poloosa je vyznačená úsečka b kolmá na a (jsou také dvě, ale vyznačili jsme jen jednu).



Obr. 3: Nová oběžná dráha modulu.

Bude pro nás důležité, že hlavní poloosa má délku $a = 2R$ (neboť v nejbližším bodě je družice vzdálena R a v nejvzdálenějším $3R$).

- To, že na obzoru byli přátelé vzdáleni $1{,}7R$, znamená, že vedlejší poloosa b má délku $b = 1{,}7R$ (viz náčrtek 3). Plochu elipsy tedy spočteme jako

$$S = \pi ab = \pi \cdot 2R \cdot 1{,}7R = 3{,}4\pi R^2\,.$$

Pojďme se nyní soustředit na trasu přátel Výfuku v modulu. Víme, že z vedlejšího vrcholu elipsy (když byla družice na obzoru) docestovali za čas t do hlavního vrcholu elipsy (když byla družice v nadhlavníku). Ujeli tedy jistou dráhu, která odpovídá nějaké ploše S_1 z elipsy. Velikost této plochy potřebujeme zjistit, abychom mohli určit plošnou rychlost, která je z druhého Keplerova zákona konstantní.

Plocha S_1 je plocha opsaná průvodičem družice, tedy spojnicí ohniska elipsy a družice. Rozdělme si ji na dvě části:

 – Plocha od obzoru k nadhlavníku je rovna čtvrtině obsahu elipsy, tj. $0{,}85\pi R^2$.
 – Zbylá plocha je tvořena pravoúhlým trojúhelníkem s přeponou průvodičem a odvěsnami b a spojnicí S a F_1. Použijeme však aproximaci ze zadání, takže počítáme obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami b a R. Ten lze vypočítat následovně:

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}7R \cdot R = 0{,}85R^2\,.$$

Plocha S_1 má tedy následující obsah:

$$S_1 = 0{,}85\pi R^2 + 0{,}85R^2 = 0{,}85R^2(\pi + 1)\,.$$

Plošnou rychlost družice w zjistíme jednoduchým vydělením plochy časem

$$w = \frac{S_1}{t}\,.$$

Nyní se ptáme, za jaký čas t_c při této konstantní plošné rychlosti urazí družice celou plochu S, tedy

$$wt_\mathrm{c} = S \quad \Rightarrow \quad t_\mathrm{c} = \frac{S}{w} = \frac{St}{S_1} = \frac{3{,}4\pi R^2 \cdot 8\,\mathrm{h}}{0{,}85R^2(\pi + 1)} \doteq 24{,}3\,\mathrm{h}\,.$$

- Využijeme třetího Keplerova zákona. Ten ve zjednodušené formě říká, že

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}\,,$$

kde $T_{1,2}$ jsou oběžné doby dvou objektů kolem jednoho centrálního a $a_{1,2}$ jsou jejich hlavní poloosy. V našem případě obíhá modul a mateřská loď kolem planety, zákon lze tedy použít. Můžeme vyjádřit poměr poloos a_1/a_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}\,,$$

do čehož už dosadíme zjištěné výsledky (T_1 loď, $T_2 = t_c$ pro družici, resp. modul)

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{\frac{(48\,\mathrm{h})^2}{(24{,}3\,\mathrm{h})^2}} \doteq 1{,}6\,.$$

Vidíme tedy, že hlavní poloosa lodě a_1 je kratší, než dvojnásobek hlavní poloosy modulu, neboť $a_1 \doteq 1{,}6a_2$. Přátelé Výfuku se dostanou domů.

Robert Gemrot
robert@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Konstrukce teploměru

7 bodů; průměr 3,50; řešilo 36 studentů

Teorie roztažnosti, o které pojednáváme ve Výfučtení této série, je široce aplikována při měření teploty. Sestavte si vlastní teploměr na bázi teplotní roztažnosti ze skleněné či plastové lahve, brčka, plastelíny a směsi lihu a vody v poměru 1:1, kterou můžete případně obarvit potravinářským barvivem, aby bylo čtení hodnot snazší. Samotný postup konstrukce nalezněte sami. Líh vám mohou rodiče zakoupit v drogerii.

Váš teploměr okalibrujte – to znamená: udělejte si na něm rysky pro nějakou velmi nízkou a pak pro nějakou vysokou teplotu, kterou určíte pomocí jiného přesného teploměru. Když takto zjistíte, jaký vlastně je rozsah (ve stupních Celsia) vašeho teploměru, použijte jej ke změření venkovní teploty ve vámi určené datum, hodinu a na vámi určeném místě.[21] Teploměr vyfoťte či jinak zdokumentujte ve všech třech měřeních. Jak přesný takový teploměr je? Diskutujte přesnost teploměru (sami ji můžete porovnat s jinými teploměry).

Upozornění: Při práci s lihem dodržujte zásady bezpečnosti popsané na jeho lahvi!

Bonus pro náročné za odměnu: Určete ze svého experimentu koeficient objemové roztažnosti vámi použitého roztoku.

Teorie

Jak se můžete dočíst ve Výfučtení této série, látky mění svůj objem s teplotou. Nejinak tomu je u 5% vodného roztoku lihu. Než se pustíme do stavby teploměru, podívejme se blíže, jak to celé funguje.[22]

Z Výfučtení známe vztah pro objemovou roztažnost kapalin $V = V_0(1 + \beta\Delta t)$. Můžeme si povšimnout, že objemová změna závisí i na počátečním objemu kapaliny. Odtud ta lahev v zadání. Brčko má malý objem, tedy změny na výsledném teploměru[23] by v případě plnění brčka samotného byly velmi malé. Pod brčko tedy připevníme lahev naplněnou ideálně až po okraj roztokem. Čím větší lahev použijeme, tím výrazněji se bude s teplotou měnit výška hladiny. Nechceme proto lahev ani moc malou, ani moc velkou. Vymyslet použití ostatních zadaných materiálů je s touto znalostí již jednoduché – brčko vnoříme do lahve tak, aby z ní trčelo, plastelínou vše utěsníme. Brčko se nejlépe připevňuje k lahvi dírou ve víčku. O pomoc s proražením díry můžeme požádat někoho dospělého. Pokud ale chceme být zcela soběstační, můžeme víčko (jako jsme to udělali i my) nahradit balonkem. Uděláme-li do něj velmi malou

[21] Údaj poté hrubě porovnáme s nejbližší meteorologickou stanicí.

[22] Podrobnější vysvětlení, než je zde, najdete ve zmiňovaném Výfučtení.

[23] Zajímavost: Teplo a teplota jsou odlišné fyzikální veličiny. Teplo lze změřit pouze nepřímo, na teplotu máme měřák. Ten se však jmenuje *teplo*měr, nikoliv *teploto*měr.

dírku, prostrčíme jí brčko a přetáhneme balonek přes okraj lahve, nebude nic vytékat kolem. Zbývá jen brčko upevnit plastelínou.

Jak je to s tou kalibrací? Z výše uvedeného vzorce plyne, že máme-li původní objem kapaliny i koeficient teplotní objemové roztažnosti konstantní, je výsledný objem na teplotě závislý lineárně. Když tedy začínáme s úplně plnou lahví a částí kapaliny v brčku, změna výšky hladiny bude v závislosti na teplotě také lineární. Po změření dvou různých teplot tak můžeme jednoduše z jejich rozdílu a rozdílu hladin vypočítat velikost jednoho dílku a dokreslit si stupnici. Takové měření by bylo přímé. Zde si ale ukážeme, že to jde i bez stupnice – tedy nepřímo.

Velikost jednoho dílku vypočteme jako podíl kalibračního rozdílu výšky hladin Δh_k (vzdálenost mezi výškou hladiny první a druhé teploty) a rozdílu kalibračních teplot $\Delta t_k = t_{k_1} - t_{k_2}$. Velikost dílku, kterou si pracovně označíme $n = \Delta h_k / \Delta t_k$, bude mít rozměr $[n] = \mathrm{m} \cdot {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

Tvůrci stupnice zde zastaví a nakreslí si ji. Měření teploměrem pomocí *odečtu ze stupnice* budeme nazývat přímé měření. Můžeme také měřit bez stupnice – tak, že změříme pomocí pravítka velikost hladiny od referenčního bodu. Tento způsob nazvěme nepřímé měření a nyní se na něj zaměříme matematicky.

Když se podíváme na rozměr naší veličiny n, zjistíme, že pokud jí vydělíme nějakou výšku, dostaneme teplotu. Takto umíme zjistit teplotní rozdíl $\Delta t = \Delta h / n$ mezi některou z kalibračních teplot a teplotou změřenou. Δh je pak rozdíl hladin použité kalibrační teploty a teploty měřené. Venku je v době měření poměrně chladno, použijeme tedy takovou kalibrační teplotu, která je vyšší než měřená teplota.

Od ní pak odečteme náš rozdíl a dostáváme teplotu venku

$$t = t_k - \Delta t\,.$$

Po dosazení všech vzorců a úpravě

$$t = t_k - \frac{\Delta h (t_{k_1} - t_{k_2})}{\Delta h_k}\,.$$

Za Δt_k dosadíme libovolnou z kalibračních teplot. Musíme však dát pozor, abychom od její výšky hladiny také měřili rozdíl hladin Δh. Tento vzorec nám jinými slovy říká, jakým způsobem můžeme zjistit měřenou teplotu pomocí vzdálenosti od jedné z kalibračních rysek a teploty, které tato kalibrační ryska odpovídá.

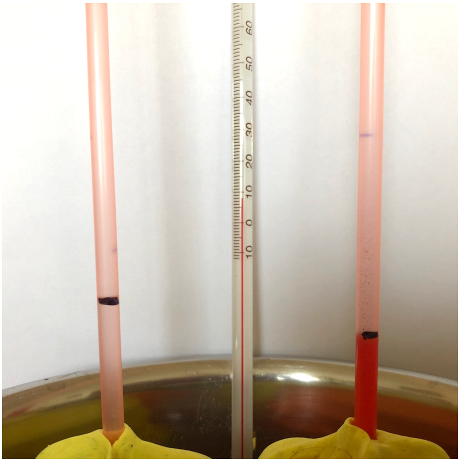
Z měřicích přístrojů tedy budeme potřebovat jen běžný teploměr ke kalibraci a pravítko. Nyní můžeme přikročit k samotnému experimentu.

Kalibrace

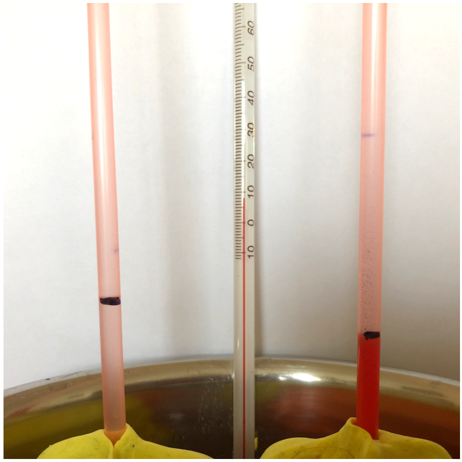
Sestavený teploměr ponoříme do studené vody (tu jsme v našem případě chladili ledem), počkáme, až se výška hladiny v teploměru ustálí (teploměr nabyl teplotu vody, v našem případě $t_{k_2} = 8\,^\circ\mathrm{C}$), uděláme permanentním fixem na náš teploměr značku a změříme teplotu vody. Totéž provedeme s teplou až horkou vodou. Musíme však dát pozor, aby voda nebyla příliš teplá a roztok nám nevytekl z brčka vrchem. V takovém případě (a pokaždé, když libovolným způsobem změníme konstrukci teploměru či hmotnost[24] kapaliny uvnitř) celý proces kalibrace opakujeme. Teplota naší horké vody byla $t_{k_1} = 38\,^\circ\mathrm{C}$. Rozdíl kalibračních teplot tedy byl $\Delta t_k = 30\,^\circ\mathrm{C}$.

Stavěli jsme dva teploměry. Pro ten nalevo byla vzdálenost mezi kalibračními značkami $\Delta h_{k_l} = 9{,}8\,\mathrm{cm}$, pro ten napravo pak $\Delta h_{k_p} = 10\,\mathrm{cm}$.

[24] Objem se mění s teplotou, tedy nedává smysl řídit se podle něj.



Obr. 4: Nižší kalibrační teplota



Obr. 5: Vyšší kalibrační teplota

Nyní můžeme vypočítat velikost jednoho dílku

$$n_l = 9{,}8\,\mathrm{cm}/30\,^\circ\mathrm{C} \doteq 0{,}33\,\mathrm{cm}\cdot{}^\circ\mathrm{C}^{-1}, n_p = 10\,\mathrm{cm}/30\,^\circ\mathrm{C} \doteq 0{,}33\,\mathrm{cm}\cdot{}^\circ\mathrm{C}^{-1}\,.$$

Vidíme, že v rámci zaokrouhlení se rozdíly ve stupnicích obou teploměrů ztratí (navíc pravítkem jsme schopni stupnici zhotovit s přesností pouze na desetiny centimetru). Metoda nepřímého měření tedy bude přesnější. Dalším důvodem je také to, že na jeden stupeň Celsia připadají rovnou tři milimetry, tedy máme celkem velký vzdálenostní rozptyl. Mezi dílky značenými po celých stupních Celsia je tedy velký prostor přesnějších měření teplot, které se ztratí všudypřítomnou chybou v měření. Tento efekt můžeme omezit podrobnější stupnicí, stále však nesmaže, že mezi oběma teploměry je ve velikosti dílků nepatrný rozdíl.

Měření

Teploměr položíme ven za okno a stejně jako u kalibrace počkáme, až nabyde teploty okolí, a změříme vzdálenost mezi aktuální hladinou kapaliny a každou z kalibračních značek. Podle vztahu odvozeného v teorii pak dopočteme změřenou teplotu. Pro každý teploměr tedy dostáváme dvě hodnoty, které by v ideálním případě měly být stejné.

Teploměr	Δh_1	t_1	Δh_2	t_2
Levý	11,4 cm	3,2 °C	1,6 cm	3,2 °C
Pravý	11,6 cm	3,1 °C	1,6 cm	3,1 °C

Tab. 2: Hodnoty naměřené nepřímým měřením

Můžeme vidět, že teploty naměřené oběma teploměry se lehce liší, zprůměrujeme je tedy a spočteme absolutní odchylku[25] $t_{\mathrm{npř}} = (3{,}15 \pm 0{,}05)\,^\circ\mathrm{C}$ Absolutní odchylku volíme proto, že

[25] Jak na to? To naleznete na našich webových stránkách v sekci Hokus Pokus.

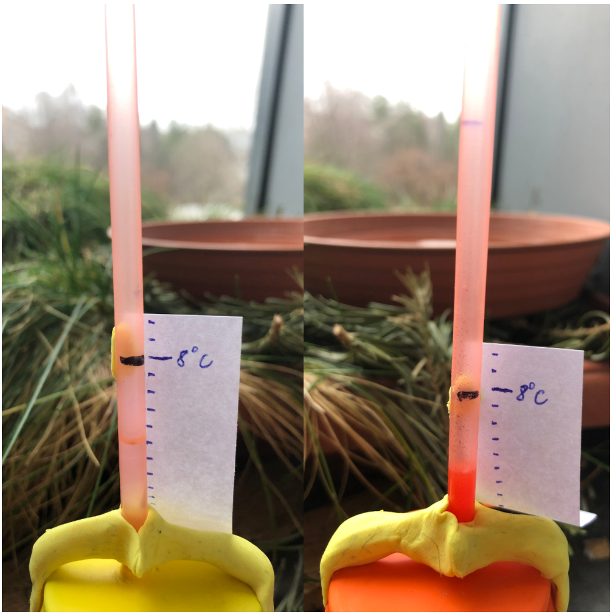
máme velmi malý počet měření.

Pro srovnání jsme na teploměry také dokreslili stupnici po jednom stupni Celsia. Teplota venku se nemění tak výrazně, aby mezi oběma měřeními (pracujeme-li rychle) byly patrné teplotní rozdíly způsobené změnou teploty venku. Zde jako nejistotu zvolíme polovinu nejmenšího dílku naší stupnice, tedy 0,5 °C. Jak je vidět z tabulky 3, nemůžeme spočítat nejistotu stejným způsobem jako minule, protože obě hodnoty jsou stejné.

Rádi bychom na tomto místě zdůraznili, že první vypočtená odchylka je pouze statistická, druhá zohledňuje nepřesnost stupnice. Žádná z nich nebere v potaz mechanismus měření. Skutečné měření je zatíženo různými chybami plynoucími např. z konstrukce teploměru, teplotní roztažnost lahve, vypařování lihu. Chyba způsobená jmenovanými faktory bude dle našeho názoru přinejmenším srovnatelná s vypočtenou odchylkou, jen ji nemáme jak odhadnout.

Teploměr	$t_{\text{př}}$
Levý	3 °C
Pravý	3 °C

Tab. 3: Hodnoty naměřené přímým měřením



Obr. 6: Měření venkovní teploty (se stupnicí). (Fotografii si nejlépe prohlédnete barevnou v elektronické verzi na našem webu.)

Závěr

Podle archivu `www.in-pocasi.cz` bylo na Proseku, kde jsme měřili, 23. 1. 2020 v 16:00 2,8 °C. Měřili jsme několik minut po šestnácté hodině a naměřili jsme $t_{\text{npř}} = (3{,}15 \pm 0{,}05)\,°\mathrm{C}$ a $t_{\text{př}} = (3 \pm 0{,}5)\,°\mathrm{C}$. Nepřímé měření bylo přesnější, avšak v intervalu odchylek leží hodnota z meteostanice pouze pro méně přesné měření, to přímé. Proč k tomu došlo? Předně – teplota se uvnitř města výrazně mění, a jelikož naše měření neprobíhalo přímo na meteorologické stanici, ale o nějakou vzdálenost jinde, mohla zde být teplota jiná. Kromě toho, měření (jak je vidět z fotografií) se odehrávalo za oknem dobře vytopeného bytu. Jistě víte, že takové okno neizoluje dostatečně dobře na to, aby teplo z bytu neunikalo (proto ostatně musíme topit, i když nevětráme). Na parapetu za oknem je tedy teplota lehce vyšší, než jakou naměří teploměr meteostanice, kterou nic nepřihřívá. Samozřejmě ani při měření na chodníku by teplota naměřená meteostanicí nemusela ležet v intervalu odchylek, zde se nám však jednoznačně vyskytla systematická chyba v podobě nedostatečného odizolování od okolních zdrojů tepla, což by se dalo zlepšit například měřením ve větší vzdálenosti od vytápěného bytu.

Toto měření ukazuje, jak může nízká přesnost zakrýt systematické chyby, které se občas v měřeních nedopatřením vyskytnou. Nemají vliv na přesnost, ale posunou výsledek vedle. Měli bychom se proto vždy snažit měřit co nejpřesněji, abychom tyto chyby odhalili.

Bonus

Abychom mohli vypracovat bonusový úkol, vyjádříme si ze vzorce z Výfučtení koeficient teplotní objemové roztažnosti

$$\beta = \frac{V - V_0}{V_0 \cdot \Delta t_k}\,,$$

kde můžeme místo $V - V_0$ psát kalibrační rozdíl objemů ΔV_k

$$\beta = \frac{\Delta V_k}{V_0 \cdot \Delta t_k}\,.$$

Vidíme, že potřebujeme změřit ještě objem kapaliny na začátku a rozdíl objemů před a po zahřátí. K tomu využijeme značky, které nám zbyly z kalibrace – teploměr naplníme vodou po první značku, změříme objem vody a kolik jí musíme doplnit po druhou značku a můžeme hodnoty dosadit do vzorce.

Pro teploměr vlevo: $V_0 = 60\,\mathrm{ml}$, $\Delta V = 1{,}6\,\mathrm{ml}$

$$\beta_l = \frac{1{,}6\,\mathrm{ml}}{60\,\mathrm{ml} \cdot 30\,°\mathrm{C}} \doteq 8{,}6 \cdot 10^{-4}\,°\mathrm{C}^{-1}\,.$$

Pro teploměr vpravo: $V_0 = 68\,\mathrm{ml}$, $\Delta V = 1{,}8\,\mathrm{ml}$

$$\beta_p = \frac{1{,}8\,\mathrm{ml}}{68\,\mathrm{ml} \cdot 30\,°\mathrm{C}} \doteq 8{,}8 \cdot 10^{-4}\,°\mathrm{C}^{-1}\,.$$

Z hodnot hustoty, které uvádí tato stránka `https://en.wikipedia.org/wiki/Ethanol_(data_page)` pro 50% roztok ethanolu při teplotě 10 °C a 30 °C (rozpětí nejbližší našemu měření) vypočteme koeficient teplotní objemové roztažnosti $\beta_w \doteq 8{,}7 \cdot 10^{-4}\,°\mathrm{C}^{-1}$. (Pro odvození vzorce pro výpočet tohoto koeficientu z hustot dosaďte za objem v původním vzorci $V = m/\varrho$ a vzorec upravte.) Naše změřená hodnota $\beta = (8{,}7 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-4}\,°\mathrm{C}$ tedy odpovídá skutečnosti.

Soňa Husáková
`sona@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.V ... Podvodník s olejem

6 bodů; průměr 4,68; řešilo 28 studentů

Obchodník s olejem nakoupil 120 barelů potravinového oleje, každý s objemem přesně 100 litrů. Napadlo jej, že když ocelové barely zahřeje, část oleje vyteče a bude jím moci naplnit další sudy. Než se však do nekalého počínání pustí, zajímá ho, kolik peněz takto neoprávněně získá.

- *Předpokládejme, že obchodník je schopen sudy s olejem ohřát o $t = 60\,^{\circ}\mathrm{C}$. Dále uvažujme koeficient teplotní objemové roztažnosti oleje jako $\beta_{\mathrm{olej}} = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$ a koeficient teplotní délkové roztažnosti oceli jako $\alpha_{\mathrm{ocel}} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Jaký objem oleje tím získá?*
- *Jeden litr potravinového oleje si zákazník koupí za 40 Kč. Vyplatí se obchodníkovi takový podvod, pokud je měrná tepelná kapacita oleje $c = 1800\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, hustota před zahřátím $\varrho = 910\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, GJ tepla stojí 560 Kč a obchodník je schopný barely zahřívat s účinností $n = 40\,\%$? Na kolik peněz si přijde?*

1. Abychom spočítali, kolik oleje ze sudů vyteče, můžeme si náš postup rozdělit na dva kroky. Nejdříve zjistíme, jak se změní objem oleje. To je jednoduché. Z Výfučtení víme, že pro výsledný objem oleje platí
$$V_{\mathrm{olej}} = V_{\mathrm{sud}}(1 + \beta_{\mathrm{olej}} t)$$
a po dosazení číselných hodnot zjistíme, že
$$V_{\mathrm{olej}} = 100\,\mathrm{l} \cdot (1 + 9{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 60\,\mathrm{K}) \doteq 105{,}8\,\mathrm{l}\,.$$
Někoho by mohlo zmást, že v zadání se objevuje změna teploty jako $t = 60\,^{\circ}\mathrm{C}$, zatímco my dosazujeme $t = 60\,\mathrm{K}$. Kdybychom počítali s konkrétními hodnotami teploty, nemohli bychom toto udělat. My ale počítáme pouze se změnou teploty, a jelikož mají stupně Celsia a Kelviny stejnou velikost a my nevíme, jaká byla původní teplota oleje a ani nás to vlastně nezajímá, můžeme tyto jednotky zaměnit.

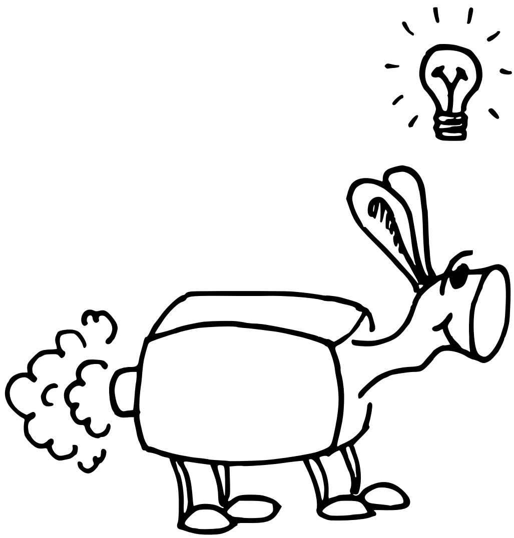
   V druhé části si musíme spočítat, jak se změní objem jednoho sudu. V zadání máme zmíněn koeficient délkové teplotní roztažnosti oceli, ale nikoli rozměry samotného sudu. Ty však nejsou potřeba, stačí si uvědomit, že sud se roztahuje do všech tří stran, a jelikož je ocel izotropní materiál, můžeme vypočítat koeficient objemové teplotní roztažnosti jako
$$\beta_{\mathrm{ocel}} = 3 \cdot \alpha_{\mathrm{ocel}}\,.$$
Výsledný objem sudu tak vypočítáme podobně jako v předchozím případě
$$V'_{\mathrm{sud}} = V_{\mathrm{sud}}(1 + \beta_{\mathrm{ocel}} t) \doteq 100{,}02\,\mathrm{l}\,.$$
Ze sudů tak vyteklo $V_{\mathrm{výtěžek}} = 120 \cdot (V_{\mathrm{olej}} - V'_{\mathrm{sud}})$, což je přibližně 690 litrů.

2. Druhou část příkladu si také můžeme rozdělit na dvě části. V té první si spočítáme, kolik peněz obchodník získá od zákazníků. To je jednoduše $V_{\mathrm{výtěžek}} \cdot 40\,\mathrm{Kč/l} \doteq 27\,560\,\mathrm{Kč}$. Nyní tak stačí zjistit, kolik by nás stálo toto hypotetické ohřátí oleje. Na ohřátí původního množství oleje ($V_{\mathrm{výtěžek}} = 12\,000\,\mathrm{l} = 12\,\mathrm{m}^3$) mu musíme dodat teplo
$$Q = V_{\mathrm{původní}}\varrho c t = 12\,\mathrm{m}^3 \cdot 910\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 1\,800\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}} \cdot 60\,\mathrm{K} \doteq 1{,}2\,\mathrm{GJ}\,.$$

Potřebujeme tak přibližně 1,2 GJ. Jelikož ale zahřívání probíhá jen se 40% účinností, je tento výsledek pouze oněch 40 % potřebné energie. Plných 100 % energie je tak $100\,\% \cdot 1{,}2\,\mathrm{GJ}/40\,\% = 3\,\mathrm{GJ}$. Za ohřátí veškerého oleje tak obchodník dohromady zaplatí $3\,\mathrm{GJ} \cdot 560\,\mathrm{Kč/GJ} \doteq 1\,680\,\mathrm{Kč}$.

Vidíme, že tato částka je výrazně menší než výtěžek z tepelné roztažnosti. Svým podvodem tak prodejce vydělá obnos $27\,560\,\mathrm{Kč} - 1\,680\,\mathrm{Kč} = 25\,880\,\mathrm{Kč}$.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	7	7	6	**43**	**173**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	2	2	2	4	7	6	4	**27**	**118**
2.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**33**
3.	*Klára Vildomcova*	ZŠ Divišov	–	3	2	–	–	2	–	**7**	**22**
4.	*Helena Rýparová*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**12**
5.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**
6.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**2**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	7	7	6	**43**	**173**
1.	*Jiří Račanský*	G, Brno-Řečkovice	5	3	6	5	7	5	6	**37**	**144**
2.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	2	2	2	4	7	7	6	**30**	**129**
3.	*Martina Černá*	ZŠ Pardubice – Polabiny	1	5	5	6	–	3	6	**26**	**122**
4.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	5	5	5	2	5	6	**33**	**119**
5.	*Ema Kučerová*	G J. Jungmanna, Litoměřice	3	5	3	2	3	2	3	**21**	**92**
6.	*Vojtěch Mišičko*	G, Jateční, Ústí nad Labem	3	2	3	–	4	1	4	**17**	**84**
7.	*Lukáš Kárník*	ZŠ Kostelec nad Černými lesy	5	6	–	6	2	2	–	**21**	**81**
8.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	4	5	–	–	–	2	–	**11**	**72**
9.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	5	6	3	–	2	–	–	**16**	**69**
10.	*Lucie Rottová*	G Ústavní, Praha	5	2	–	–	–	–	–	**7**	**64**
11.–12.	*Eliška Dřínková*	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	4	2	–	6	7	–	–	**19**	**60**
11.–12.	*David Matoušek*	ZŠ Němčice nad Hanou	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**60**
13.	*Ondřej Fikr*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**55**
14.	*Tereza Sršňová*	G, Budějovická, Praha	1	4	3	–	–	–	–	**8**	**54**
15.	*Eliška Urbanová*	ZŠ Divišov	–	6	–	–	–	–	–	**6**	**52**
16.	*Patricie Labuťová*	ZŠ Jiráskovo n., Hradec Králové	5	5	5	–	3	–	–	**18**	**48**
17.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	–	0	1	1	1	0	2	**5**	**44**
18.	*Jakub Roštík*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**43**
19.	*Tereza Martišová*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	4	6	–	–	–	–	–	**10**	**40**
20.	*Štěpán Stichenwirth*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**34**
21.	*Petr Švestka*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**31**
22.–23.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	1	4	1	1	2	1	1	**11**	**30**
22.–23.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	6	–	–	–	4	–	**15**	**30**
24.	*Bruno Jan Šulc*	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
25.–26.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
25.–26.	*Gabriela Volková*	Masarykovo G, Vsetín	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**27**
27.	*Melánie Boušková*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**26**
28.	*Matěj Dušek*	ZŠ Roztoky	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**
29.–30.	*Tomáš Viktor Kubíček*	ZŠ a MŠ DOCTRINA, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
29.–30.	*Jana Novotný*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
31.	*Natálie Boucová*	Masarykovo klasické G, Říčany	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
32.	*Věra Marie Krejčí*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**20**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	6	7	7	6	**43**	**173**
33.	*Kristýna Kábrtová*	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
34.	*Bianka Jirátková*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
35.–37.	*Ema Čekalová*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
35.–37.	*Adam Ondračka*	ZŠ Pionýrů, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
35.–37.	*Anežka Štulová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
38.	*Pavel Fryjauf*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
39.	*Barbora Pauková*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
40.–41.	*Vítek Novotný*	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
40.–41.	*Jan Štefanča*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
42.	*Matěj Čentík*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
43.–44.	*Mai Chu Nhu*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
43.–44.	*Jan Mansfeld*	ZŠ Třebíz	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
45.	*Leontýna Helena Keates*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
46.–48.	*Karolína Foltýnová*	ZŠ U Hřiště, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
46.–48.	*Denisa Mazáčová*	Masarykovo G, Vsetín	–	1	–	–	–	–	–	**1**	**6**
46.–48.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
49.–51.	*Michaela Marešová*	ZŠ Chyšky	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
49.–51.	*Lukáš Matoušek*	G, Česká Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
49.–51.	*Vladimír Tůma*	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	7	7	6	**38**	**153**
1.	*Matouš Mišta*	G, Olomouc-Hejčín	–	3	6	6	6	3	3	**27**	**130**
2.	*David Něnička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	5	6	6	7	5	4	**33**	**128**
3.	*Magdalena Hybnerová*	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	6	6	6	7	7	6	**38**	**124**
4.	*Renata Brázdová*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	6	5	6	6	4	6	**33**	**118**
5.	*Eva Barčová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	4	6	6	4	6	**31**	**111**
6.	*Ivan Žemlička*	G Ústavní, Praha	–	5	5	6	6	5	6	**33**	**91**
7.–8.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	–	4	6	6	–	–	3	**19**	**83**
7.–8.	*Pavla Šimová*	G, Šumperk	–	6	6	–	–	5	2	**19**	**83**
9.	*Sebastian Ray*	ZŠ Školní, Bechyně	–	6	6	–	–	–	–	**12**	**76**
10.	*Adam Bretšnajder*	G Z. Wintra, Rakovník	–	4	6	–	–	–	5	**15**	**70**
11.–12.	*Agáta Anna Štěpánová*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	4	6	5	6	–	5	**26**	**69**
11.–12.	*Václav Verner*	PORG, Praha	–	2	3	1	3	–	6	**15**	**69**
13.	*Lucie Židková*	G Komenského, Havířov	–	6	2	6	–	3	5	**22**	**57**
14.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	–	–	2	–	–	–	–	**2**	**56**
15.	*David Vedral*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**52**
16.	*Karel Kubeš*	G, Písek	–	5	4	–	–	–	6	**15**	**49**
17.–18.	*Alexander Adámek*	ZŠ Hostýnská, Praha 10	–	–	4	6	–	3	–	**13**	**45**
17.–18.	*Radim Gabriel*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	3	5	5	2	1	6	**22**	**45**
19.	*Jan Kroupa*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	2	3	1	–	2	–	**8**	**39**
20.–21.	*Jakub Drábek*	Slovanské G, Olomouc	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**34**
20.–21.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	5	6	–	4	–	**15**	**34**
22.	*Jakub Merta*	ZŠ Brno - Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
23.	*Rebeka Heřmanová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
24.	*Klára Rašková*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	**28**
25.	*Václav Vostal*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
26.–27.	*Magdaléna Jůzová*	ZŠ Brno - Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	7	7	6	**38**	**153**
26.–27.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
28.	*Vít Němec*	ZŠ a MŠ Tasovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
29.	*Adam Černý*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
30.–31.	*Kristýna Šeděnková*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
30.–31.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
32.	*Antonie Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
33.–34.	*Františka Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
33.–34.	*Matěj Šicner*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
35.	*Teo Bumbálek*	Mendelovo G, Opava	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**14**
36.	*Tomáš Dokulil*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
37.–39.	*Lukáš Albrecht*	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
37.–39.	*Oliver Kodyš*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
37.–39.	*Vojtěch Muller*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
40.–42.	*Jiří Cepník*	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
40.–42.	*Romana Kolembusová*	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
40.–42.	*Matěj Krátký*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
43.–45.	*Vojtěch Fajstl*	ZŠ a MŠ Ptení	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
43.–45.	*Lukáš Hrdý*	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
43.–45.	*Klára Řeháková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
46.–47.	*Tomáš Bořil*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
46.–47.	*Matyáš Malát*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	1	–	1	–	1	–	**3**	**3**
48.	*Matěj Strnad*	ZŠ Dr. Františka Ladislava Riegr	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**2**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	7	7	6	**38**	**153**
1.	*Vojtěch Kadeřábek*	G Mensa, Praha	–	5	6	6	7	5	6	**35**	**147**
2.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	6	6	6	7	4	5	**34**	**144**
3.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	–	5	4	6	3	6	5	**29**	**121**
4.	*Daniel Čtvrtečka*	G, Budějovická, Praha	–	6	2	3	6	2	–	**19**	**93**
5.	*Šimon Genčur*	Biskupské G, Brno	–	3	6	5	2	–	2	**18**	**92**
6.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	5	3	–	–	2	6	**16**	**69**
7.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**52**
8.	*Lukáš Rella*	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
9.	*Markéta Poláčková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
10.	*Jakub Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
11.	*Ivana Ludvíková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
12.	*Jakub Mašek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
13.	*Ema Vecková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**16**
14.	*Květa Barhoňová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**15**
15.	*Kristián Matúš*	ZŠ a MŠ Veřovice	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**14**
16.	*Klára Forstová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**13**
17.–18.	*Eliška Marečková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
17.–18.	*Ondřej Petržík*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
19.–20.	*Zuzana Petržíková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
19.–20.	*Anastasie Voronscaia*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
21.–23.	*Zuzana Forsterová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
21.–23.	*Jan Kouba*	G, Prachatice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
21.–23.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
24.–29.	*Ondřej Běhenský*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		6	6	6	7	7	6	**38**	**153**
24.–29.	*Šárka Nejedlová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**9**
24.–29.	*Ivan Pavle*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
24.–29.	*Hanka Phanová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
24.–29.	*Stela Provalilová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**9**
24.–29.	*Jakub Škarda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
30.	*Matěj Žambůrek*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**
31.–32.	*Tomáš Dofek*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**
31.–32.	*Ondřej Tauer*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**
33.–43.	*Tomáš Benda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Barbora Černá*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Danielle Fohlová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Pavel Hikl*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Esther Eleonor Hromádková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Jana Jankovcová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Klára Lojdová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Evelína Lokvencová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Hoang Ly Nguyenová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Natálie Pekařová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
33.–43.	*Natálie Špirková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
44.–45.	*Martin Franěk*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**
44.–45.	*Eliška Zelenková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**
46.	*Anna Marie Mikolášová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**3**
47.–48.	*Alice Jankovcová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**2**
47.–48.	*Natálie Veberová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**2**
49.–51.	*Kryštof Krčmárik*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**1**
49.–51.	*Dao Ngoc Ly*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**1**
49.–51.	*Klára Routová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**1**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.