Výfučtení: Páky a kladky

Všichni občas přemýšlíme nad tím, jak něco funguje. Uvědomujeme si, že mechanismy schované za spoustou věcí jsou příliš složité na to, abychom je bez bližšího zkoumání a pečlivého studia pochopili. Samotné slovo složitý (cizím slovem komplexní) však znamená, že mechanismy jsou *složené* z více menších částí. Porozumění tedy můžeme dosáhnout, pokud zařízení *zjednodušíme* neboli rozložíme[1] na jednotlivé malé fungující celky. Spousta mechanismů jako např. hodinky svou složitost získává jen proto, aby se vešla na menší plochu nebo „zvládla víc", přitom pokud jednotlivé součástky stroje zkoumáme zvlášť a v jejich vztazích, zjistíme, že se často nejedná o nic složitého. Jedním z mnoha základních mechanismů, ze kterých se skládají ty složitější, jsou páky a kladky, které patří mezi tzv. jednoduché stroje. Naleznete je všude: od houpačky na dětském hřišti až po raketu Saturn V.

Páky

Páky i kladky tedy patří mezi jednoduché stroje. Ty jsou v základním stavu v rovnováze a podle toho, jak rovnováhu porušujeme, se obvykle snaží do ní dostat zpět. V případě páky (ukázkovou páku můžete vidět na obrázku číslo 1), která je v rovnováze, musí být součet momentů sil na obou ramenech nulový. Tento fyzikální předpoklad znázorňujeme následující rovnicí:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = 0 \quad \text{neboli} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i = 0\,.$$

Rovnice vlevo říká, že součet všech momentů sil, které na páce působí a kterých je dohromady n, je roven nule. Na pravé straně máme ekvivalentní formulaci pomocí znaku velká sigma, které značí operaci suma, neboli „součet všech" – sečteme všechny momenty sil s indexem i, který nabývá hodnot od 1 po n.

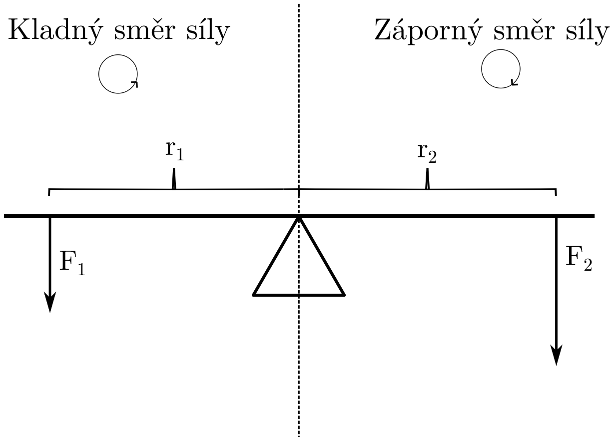
Moment síly je součinem síly působící kolmo na páku a její vzdálenosti od středu otáčení (u pák od podpěry), výsledný vzorec tedy vypadá takto: $\sum_{i=1}^{n} F_i r_i = 0$. Tady můžeme vidět velkou podobnost s Newtonovým prvním zákonem, který tvrdí, že těleso je v rovnováze, když je součet sil, které na něj působí, roven nule. Zde však používáme momenty sil a to má to svůj důvod. Záleží totiž, jak daleko od osy otáčení působíme, což si můžete sami ověřit. Zkuste např. otevřít dveře tak, že budete tlačit blízko pantů. To půjde hůře, než když budete tlačit daleko od nich.

Jistě víte, že sčítáním samých kladných hodnot nulu nevyrobíme, ale my můžeme do našeho vzorce „vyrobit" hodnotu zápornou. Zavedeme si totiž kladné a záporné směry. Jak se s nimi pracuje se dočtete níže, prozatím se jen dohodneme, že kladné jsou momenty, které se páku snaží otočit proti směru hodinových ručiček.

Máme dva druhy pák – jednozvratnou a dvojzvratnou. Běžným příkladem dvojzvratné páky je dětská houpačka. Má podpěru (ideálně uprostřed) a dvě ramena (obrázek 1). Když na každém z nich sedí jedno dítě, tíhové síly působící díky dětem na páku houpačky míří stejným směrem. Děti ale sedí na opačných stranách. Jedno tedy musí působit momentem síly v záporném směru

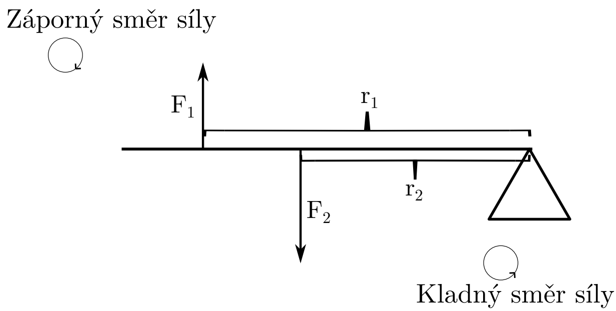
[1] A tento rozklad nemusí být jen přiblížení, vždyť matematická analýza (neboli rozklad) je samostatná disciplína, kterou fyzikové hojně používají.

a jeho sílu tedy opatříme znaménkem minus. Voilá – zvolíme-li správně těžké děti a posadíme-li je správně daleko od podpěry, může být součet momentů sil nulový a páka je v rovnováze. $F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot (-r_2) = 0$, což můžeme upravit na $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$.



Obr. 1: Znázornění záporné a kladné síly ve dvojzvratné páce

Pěkným příkladem páky jednozvratné – s jedním ramenem – jsou již zmíněné dveře (obr. 2). Představte si pro ilustraci, že se s bratrem přetahujete o dveře (nedělejte to však, některé experimenty přenechme kandidátům na Darwinovu cenu). Vy chcete dveře zavřít, tlačíte je silou dopředu. Bratr chce do pokoje a potřebuje je otevřít, tak tahá silou zpět dozadu – používá sílu zápornou. $F_1 \cdot r_1 + (-F_2) \cdot r_2 = 0$, což lze upravit na $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$.



Obr. 2: Znázornění záporného a kladného směru síly na jednozvratné páce

Možná se ptáte, proč v obou případech rozlišujeme na zápornou a kladnou pouze sílu. Základní úvaha, která nám vždy pomůže, je zvolit si, jaké znaménko odpovídá kterému směru otáčení. Tato volba je zcela na nás, ale musíme se jí držet při všech výpočtech. Síly, které působí po zvoleném směru, pak můžeme značit jako kladné, a silám v protisměru pak připíšeme mínus. Mínus můžeme místo síly připsat vzdálenosti, avšak rozhodně ne síle i vzdálenosti najednou, jinak by se znaménka vyrušila v součinu a nebylo by nijak zaznamenáno, že je moment opačný (naším cílem je zapsat, že je opačný celý moment). Naši volbu pro toto Výfučtení jsme v obrázku 1 a 2 naznačili kruhovými šipkami. Tedy bez ohledu na to, jaké znaménko bude mít výsledek vašich výpočtů, musíte vědět, kterému směru otáčení odpovídá.

To, jak jsou příklady uvedeny, má za následek, že bychom došli ke stejnému výsledku, i kdybychom všechna (tj. i nepsaná kladná) znaménka otočili – to by odpovídalo vynásobení celé rovnice faktorem -1. Může se však stát, že úloha bude kombinovat různé směry sil i vzdáleností. U složitějších soustav pák (nebo kladek), ke kterým se teprve dostaneme, budeme poctivě rozlišovat všechny směry tak, že vzdálenosti budou vždy kladné a síly budeme rozlišovat podle toho, zda působí vždy po, nebo proti směru hodinových ručiček.

Použití páky

Výše popsaný mechanismus páky můžeme využít například pokud chceme uzvednout těžký předmět. Představte si třeba stokilový balík postavený na jeden konec páky z obr. 1 ve vzdálenosti $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$ vlevo od středu. Když ho bude chtít běžný smrtelník zvednout, nepovede se mu to, poněvadž váží cca $50\,\mathrm{kg}$. Pokud si ale sedne nebo zatlačí na páku ve vzdálenosti $2r = 1\,\mathrm{m}$ napravo od středu, tak balík lehce vytlačí, protože mu k tomu bude stačit tíha $50\,\mathrm{kg}$. Platí tedy, že čím dál od středu páky působíme, tím menší silou nám stačí působit, abychom páku překlopili.

Kladky

S kladkami se obvykle setkáváme, pokud chceme něco zvednout, vytáhnout nebo někam dopravit, aniž bychom se hnuli z místa. Jde často o neprokluzující kola daného poloměru, jejichž osy jsou připevněny k pevné nebo pohyblivé základně a na která *klademe* např. provazy, což nám při jejich napnutí dovoluje sílu působící v jednom směru přenášet do směru jiného (např. horolezec jistič tím, že provaz přes kladku stahuje k sobě dolů, vytahuje svého kolegu nahoru a může tak brzdit jeho pád).

Běžná kladka má samozřejmě nenulovou hmotnost. My však budeme kladky včetně lan uvažovat jako nehmotné, dokonale tuhé a s ideálním (dostatečně velkým) třením.[2] Nejenže nám to značně zjednoduší výpočty, ale můžeme se pustit i do složitějších konstrukcí a soustav a přitom budeme moci všechny vzorce stále pohodlně upravovat.

Kladky dělíme na dva druhy – pevné a volné.

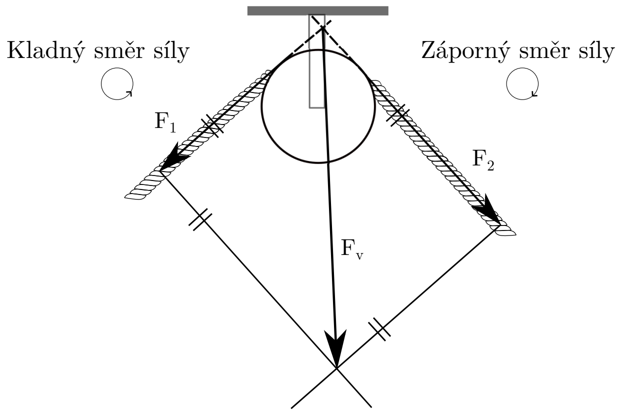
Pevné kladky

Pevná kladka, jak název napovídá, je pevně spojena s podkladem, stěnou, nebo čímkoliv, na čem drží tak, aby se její osa nepohnula, a sama se přitom mohla volně točit na místě. V rovnováze je právě tehdy, pokud na oba konce lana přes ni položeného působíme stejně velkou silou směrem od kladky. I zde můžeme určit kladný a záporný směr síly, ale tentokrát ne podle směru síly, ale podle směru, kterým síla kladku roztáčí. Považujme tedy sílu, která kladku roztočí proti směru hodinových ručiček, za kladnou, a po směru za zápornou. Nyní můžeme obdobně jako u pák psát $\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$. Na kladku samotnou potom působí tzv. vektorový součet těchto sil.

[2] Tento předpoklad je přitom často s velkou přesností splněn. Např. váží-li náklad tunu a kladka kilo, pak je v porovnání s nákladem vskutku téměř nehmotná a provaz je na ni přitlačen tak dobře, že stěží dojde ke kluzu.

Nejedná se však o součet stejný jako pro rovnováhu na kladce, protože síla nemá jen velikost, ale i směr, kterým působí.[3] Jak provést vektorový součet matematicky najdete ve Výfučtení první série pátého ročníku.[4]

Zde si ukážeme, jak je sečíst „graficky“ (vizte obrázek (3)). Dvě síly, kterými díky lanu působíme na kladku, si nakreslíme jako šipky. Každá má směr síly, kterou představuje, a její délka odpovídá ve zvoleném měřítku velikosti dané síly. Obě mají působiště (začátek šipky) ve stejném bodě. Šipky doplníme na rovnoběžník. Úhlopříčka tohoto rovnoběžníku spojující působiště a nově vzniklý bod má směr součtu sil a délkou v měřítku odpovídá velikosti výsledné síly působící na pevnou kladku. Velikost síly je pak možné v konkrétních případech vypočítat pomocí vzorců pro v náčrtu vzniklé geometrické útvary, jako délku úhlopříčky, kterou najdete v tabulkách.



Obr. 3: Grafické sečtení dvou sil působících na kladku

Pevná kladka se obvykle používá k tomu, abychom změnili směr působící síly. Když například chceme zvednout náklad, nemusíme působit silou směrem nahoru, stačí táhnout provaz přes kladku směrem dolů. Oproti tomu volná kladka nám práci může usnadnit, což si ukážeme v další sekci.

Volné kladky

Volná kladka je taková, která na laně visí (nahlížejte do obr. 4). Jeden konec lana je pevně přichycen (např. o zeď), za druhý lze libovolně tahat. Kladka vždy po laně sklouzne nejníže, kam může, čímž zajistí, že celá soustava bude osově souměrná a oba konce lana tedy budou s osou svírat stejný úhel a na kladku v rovnováze budou působit stejně velkými silami. Aby kladka na laně visela, musí na ni něco působit silou směrem dolů (například uprostřed zavěšené závaží silou tíhovou).

Uvažujme, že za volnou kladku taháme přímo vzhůru, neboli, že na obrázku níže je F_1 rovnoběžná s výslednou silou F_v. Pak stačí náklad působící silou F tahat poloviční silou $F/2$!

[3] Takovým veličinám jako síla říkáme vektorové.

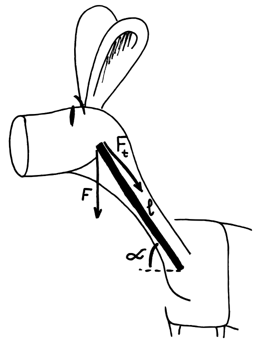
[4] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r5/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf

Přitom tento předpoklad je v praxi velmi často splněn. Kde vězí ten háček, neporušuje se např. zákon zachování energie?

Zákon zachování energie se naštěstí neporušuje, protože předmět, který taháme nahoru, stoupá pomaleji. Přesněji řečeno dvakrát pomaleji. Abychom náklad zvedli o výšku h, musíme vytáhnout $2h$ lana, tedy celková vykonaná práce zůstává stejná.

Volná kladka má obvykle drobnou nevýhodu – musíme být výš než zvedaný předmět. Tento „nedostatek" vyřešíme tak, že nad volnou kladku přidáme jednu pevnou, čímž vytvoříme kladkostroj. Zde jsou obvykle všechna lana mezi volnou a pevnou kladkou rovnoběžná, tedy nemusíme řešit rozklady sil, což nám výrazně usnadní výpočty. U nejjednoduššího kladkostroje visí volná kladka na dvou lanech, tedy každé lano působí polovinou síly potřebné k vyrovnání tíhové síly závaží. Pokud postavíme kladkostroj ze tří kladek, volná kladka visí na třech lanech, tedy lana působí silou třetinovou, při čtyřech kladkách visí na čtyřech lanech, síla bude čtvrtinová atd. Stejně velkou silou pak taháme za volný konec lana a stačí nám tedy málo, abychom závaží na kladce zavěšené uzvedli. Pomocí kladkostrojů tedy lze zvedat velmi těžké předměty s menší námahou.

Složitější, ale přesnější výpočet volné kladky



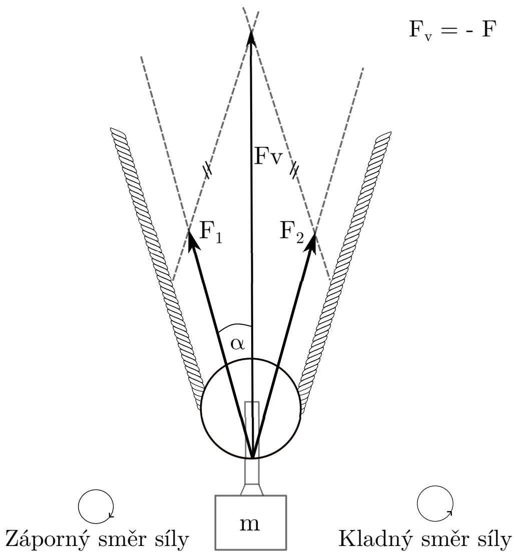
V této sekci si odvodíme, jakou silou musíme táhnout kladku, když neplatí, že F_1 je rovnoběžná s F_v. Protože je v klidu (v rovnováze), podle prvního Newtonova zákona je výslednice všech sil na ni působících nulová. To nastane, když lano působí celkově stejně velkou silou, jakou je kladka tažena dolů, ale v opačném směru. A tak jako jsme síly konců lan u pevné kladky skládali, nyní tu jednu celkovou rozložíme na složky jednotlivých lan. Sílu, kterou známe, si vyznačíme stejně jako v předchozím případě. Z jejího působiště vedeme polopřímky ve směru, v jakém potřebujeme, aby složky směřovaly. Tvar opět doplníme na rovnoběžník, jehož úhlopříčku tvoří známá síla. Délky stran rovnoběžníku v měřítku odpovídají velikosti sil a opět je lze dopočítat pomocí geometrických vzorců, které naleznete v tabulkách. Pro případ volné kladky jsme dostali kosočtverec, protože obě síly jsou stejně velké a svírají s původní silou stejný úhel α. Úhlopříčky tohoto útvaru jsou na sebe kolmé a navzájem se půlí. Pokud tedy goniometrickou funkcí dopočítáme délku poloviny druhé úhlopříčky[5] $c = (F/2)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, můžeme velikost síly konce lana vypočítat Pythagorovou větou

$$F_1 = \sqrt{c^2 + \left(\frac{F}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2 + \left(\frac{F}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{F^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + F^2}{4}}\,.$$

Speciálním případem jsou konce lana působící silou rovnoběžnou s celkovou silou působení lana, kdy po dosazení úhlu $\alpha = 0\,\mathrm{d}g$ $(\mathrm{tg}\,0\,^\circ = 0)$ dostaneme $F_1 = F/2$. Naopak úhel $\alpha = 90\,^\circ$ získat nemůžeme. Zkuste si experimentálně ověřit, že pokud na sebevíc napnuté lano umístíte i jen lehoučký předmět, vždy se alespoň nepatrně prohne. Ani samotná funkce tangens není pro tento případ definovaná.[6]

[5] První úhlopříčka má délku F odpovídající v měřítku velikosti síly.

[6] Pro výpočet úhlu α, známe-li $\mathrm{tg}\,\alpha$, má kalkulačka tlačítko tg^{-1}. Obdobná má pak i pro ostatní funkce.



Obr. 4: Grafický rozklad sil na volné kladce

A kde to všechno hledat?

Co se stane, když na páku, nebo lano hozené přes kladku budeme působit silou, kterou narušíme rovnováhu? Jako při každém silovém působení udělíme páce nebo lanu zrychlení (respektive úhlové zrychlení). Tím se tady však zabývat nebudeme a budeme předpokládat, že narušení rovnováhy bylo tak krátké, že uvedlo systém do rovnoměrného pohybu, ve kterém dle druhého Newtonova zákona v rovnováze setrvává. „A k čemu mi to bude?“

Každý už určitě slyšel: „Sedíš křivě, budou tě bolet záda.“ Běžně akorát ohrneme nos. Tak se nad onou větou trochu pozastavme. Kolik z vás má při počítání krk dopředu (přibližně pod úhlem $\alpha = 45\,^\circ$ a ráno nadává, že ho bolí hlava? Můžou za to přetížené svaly na zadní straně krku a zad. Upínají se podél páteře, u ramen, pod hlavou a kdesi v polovině zad a zajišťují mimo jiné to, že nám intelektuálům nespadne hlava na klávesnici. Zjednodušme tedy celý krk na jednozvratnou páku tím, že zanedbáme drobné svaly mezi obratli (budeme předpokládat, že zajišťují, aby se krk neprohýbal). Na konci ji ve vzdálenosti l (délka krku) zatěžuje hlava s hmotností m. Hlava však působí silou F kolmo k zemi, nikoliv kolmo k páce. Sílu proto musíme rozložit.

V tomto případě potřebujeme nové síly rozkladu kolmo na páku a rovnoběžně s pákou. Jelikož jsou síly na sebe kolmé a známe úhel, který svírá páka se zemí, tedy i úhel tíhové síly hlavy a sil, na které ji rozkládáme, můžeme je přesně vypočítat goniometrickými funkcemi. Zajímá nás pouze ta, která je kolmá na páku $F_1 = mg\sin(45\,^\circ) = mg/\sqrt{2}$ (krk pod tímto úhlem tvoří úhlopříčku čtverce). Obdobně rozložíme sílu F_t, kterou vyrovnávají páku svaly podél krku a zad. Abychom mohli pokládat krk za páku, řekli jsme, že všechno, co se upíná na jednotlivé obratle, zajišťuje, aby krk držel jako tyč. Zbývají nám tedy svaly (a části svalů) upínající se pouze na konci krku. Zde zvolíme velmi malou hodnotu úhlu, protože svaly jsou s krkem téměř rovnoběžné $F_2 = F_t\sin(10\,^\circ)$. Doplníme do vzorce z výše uvedeného odstavce o pákách, přičemž i svaly, jejichž sílu chceme znát, se upínají až na konci krku skoro u hlavy $lmg \sin(45\,°) = lF_t \sin(10\,°)$. Rovnici vydělíme $l \sin(10\,°)$, čímž se zbavíme vzdálenosti, vyjádříme F_t a dosadíme čísla. Průměrná lidská hlava váží okolo $m = 4{,}5\,\mathrm{kg}$, ostatní jsou konstanty.

Výsledek? Vaše svaly vyrovnávající hlavu působí silou $F_t \doteq 179{,}8\,\mathrm{N}$. To je jako by na nich přímo k zemi visel dospělý klokan Parryův.[7] Tato hodnota je ale pouze přibližná, protože úhel byl zvolen také jako přibližný, charakterizující celou svalovou skupinu, v níž je však každé svalové vlákno napjaté v každém bodě trochu jinak a po celé své délce. Dosadíte-li trochu menší úhel, zjistíte, že hodnota velmi rychle poroste. Je tedy možné, že při čtení tohoto textu taháte mnohem těžší zvíře, pro představu to však stačí.

Ukázali jsme si tedy praktický příklad z anatomie. Zde však cesta počítání teprve začíná. Víte, jakou silou musíte působit na kabinku z půlky plného London Eye, abyste ho zastavili? Poradíme vám, že takové ruské kolo je vlastně soustava pák slepených „do hvězdičky“. Se směry můžete pracovat jako u kladek, a jak vypreparovat sílu kolmou na páku z jiné už také víte. Hurá tedy vyhledat rozměry, osázet kolotoč lidmi a můžete se pustit do výpočtů, výsledek stojí za to. Také by vás mohlo zajímat, proč mají klíče tak velkou část na konci. Jistě je to i pro lepší úchop, ale zkuste si spočíst, o kolik větší sílu byste museli vyvinout na odemykání velkým klíčem s poloviční „hlavičkou“. Dostali byste se domů? Umíte převedením kola na kladku spočítat, jak silné musí mít člověk na invalidním vozíku ruce, aby se vytlačil do kopce? To vše a mnohem více.

A co když vám řekneme, že teď umíte zdůvodnit, proč pravítko o hranu stolu zlomíte spíš uprostřed než na kraji? I v tak zdánlivě „nudné“ a „bezvýznamné“ části mechaniky jako jsou kladky a páky se skrývá vysvětlení fungování značné části světa.

Závěr

V tomto Výfučtení jsme představili tři důležité jednoduché stroje: páku, volnou kladku a pevnou kladku. Tyto stroje nám ulehčují vykonávání práce, byť celková vykonaná práce na určitý úkon (třeba zvednutí předmětu) je vždycky stejná. Stroje nám poskytují následující ulehčení:

Páka: pro zvednutí předmětu stačí působit menší silou, za to však musíme působit po delší dráze.

Pevná kladka: tento stroj mění směr, kterým silou musíme působit.

Volná kladka: volná kladka umožňuje zvedat předměty až dvakrát menší silou, musíme však tahat dvakrát více provazu.

Fungování strojů jsme si odvodili na principu Newtonova prvního zákona a pomocí rozkladu sil (tj. pomocí *principu superpozice*). V průběhu textu jsme zmínili bezpočet praktických uplatnění těchto strojů, ale i jejich výskyty v přírodě jako např. trapézové svaly. Jak jsme psali na začátku, z jednoduchých strojů se skládá mnoho strojů složitějších (ale i jevů), a proto je jejich pochopení důležité.

Důležité je nakonec poznamenat, že umíme-li přesně rýsovat, můžeme problém řešit i tehdy, pokud neumíme pracovat se vzorci pro vztahy mezi poměry stran a úhly. Dodržíme-li měřítko, kterým síly rýsujeme, můžeme měřit i v obrázku. (Obdobně jako v první a poslední úloze této série.)

[7] Pro zájemce hmotnosti některých dospělých savců: `https://thewebsiteofeverything.com/animals/mammals/adult-weight.html`

Julie Weisová
julca@vyfuk.mff.cuni.cz

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.