výpočty fyzikálních úkolů

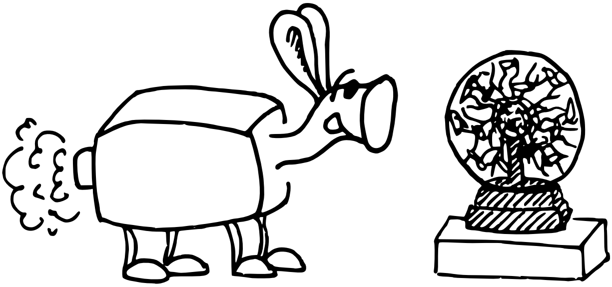
Milí kamarádi,

jaro se nám pomalu blíží a s ním i pátá brožurka Výfuku se zadáním 5. série. Během jejího řešení se můžete spolu s hlavním hrdinou Výfučkem vypravit na dalekou cestu z perského městečka do Egypta a spolu s ním spočítat parametry létajícího koberce nebo práce a síly potřebné ke stavbě pyramid. Kromě zadání zde naleznete také pololetní pořadí a vzorová řešení třetí série, kde můžete například zjistit, jakou rychlostí musí LeBron házet, aby se trefil do koše a překvapil tak svého kamaráda Kobeho. I nás však zasáhla zpráva, že tento skvělý basketbalista už není mezi námi.[1]

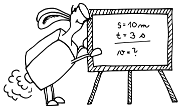
Přicházející jaro rovněž znamená i blížící se jarní setkání, které proběhne 17. – 19. dubna v Havířově a na které se ještě stále můžete přihlašovat.

Kromě setkání nás čeká i letní tábor, na který zbývá posledních pár volných míst, takže pokud jste nestihli přihlašování, máte ještě šanci se nám ozvat na email `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz` a tábora se zúčastnit.

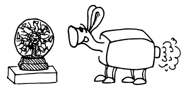
Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



[1] Kobe Bean Bryant (*23. 8. 1978) zahynul 26. ledna při havárii helikoptéry.

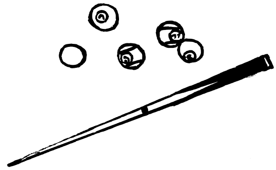


Zadání V. série



Termín odeslání: 30. 3. 2020 20.00

Úloha V.1 ... Orientální kulečník ❻ ❼ 5 bodů



Výfuček bloumal uličkami malého perského městečka, když narazil na záhadného muže. Ten mu nabídl odměnu, pokud uhodne, kterou ze čtyř koulí trefí ta jeho. Stoupl si k netradičnímu kulečníkovému stolu a zamířil tágem na svou kouli, která ležela uprostřed. Na stole o rozměrech 9 m krát 3 m měl ještě další čtyři koule umístěné na souřadnicích [3 m; 1 m], [6 m; 1 m], [3 m; 2 m], [6 m; 2 m] (měřeno od dolního levého rohu; tedy na průsečících přímek, které jsou kolmé ke stranám stolu a vedou první a druhou třetinou). Výfuček si všiml, že koule narazí do jedné z kratších stěn ve vzdálenosti $d = 0{,}55\,\mathrm{m}$ od rohu. Pomůžete mu zjistit, kterou kouli kulečníkový chlapík trefí? Pod jakými úhly se odrazí od stěn, do kterých cestou narazí? V jakých vzdálenostech od rohů stolu do stěn narazí?

Úlohu řešte graficky – ve vámi zvoleném měřítku si narýsujte obrázek, v něm vše určete a nezapomeňte přepočítat zpět na rozměry z města. Kulečníkové koule jsou opravdu malé, takže je můžeme nahradit body.

Úloha V.2 ... Kvadratura koberce ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Výfuček se rozhodl za získané peníze něco hezkého koupit, a tak se vydal na tržiště. Jeden kupec mu nabídl desetimetrový pravý létající koberec. Výfuček se však nechtěl nechat ošidit, a proto se rozhodl kupcovo tvrzení otestovat. Bohužel měl jen svinovací metr, koberec byl namotaný na tyči a nebylo možné ho v malém prostoru zakouřeného stanu roztáhnout. Výfuček si tedy změřil, že obvod tyče, na které je koberec namotán, je $o = 0{,}3\,\mathrm{m}$ a obvod obvázaného koberce je $O = 1{,}7\,\mathrm{m}$. Dále si všiml, že koberec je kolem tyče omotán desetkrát. Pomozte Výfučkovi odhadnout délku koberce a ověřit tak, že kupec říká pravdu.

Úloha V.3 ... Div světa ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Výfuček si šel po náročné licitaci sednout do kavárny a přemýšlel, kam by se na svém létajícím koberci vydal. Než mu obsluha přinesla čaj, trochu se nudil, a tak si z kostek cukru stavěl pyramidu. V tom ho napadlo perfektní místo – Cheopsova pyramida v Egyptě! Výfuček však chtěl být zodpovědný turista a o své destinaci si předem něco zjistit. Přemýšlel tak nad tím, jakou nejmenší práci vykonal, když stavěl svůj model pyramidy z kostek cukru, aby to pak mohl porovnat se skutečnou pyramidou.

Vypočítejte minimální Výfučkovu práci, jestliže v nejvyšší řadě pyramidy byla jedna kostka, ve druhé nejvyšší dvě kostky, ve třetí tři atd. Pyramida byla sestavena ze 105 kostek a jedna kostka vážila podle údajů výrobce 5 g a měla hranu 1 cm. Zpočátku všechny kostky ležely na stole v řadě.

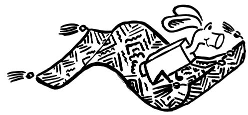
Úloha V.4 ... Alhazenův odraz ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Během náročných výpočtů si Výfuček krátil čas hraním si s propiskou. Uchopil její konec, na němž je kovový hrot, a propisku upustil. Poté, co pero s hmotností $m = 2\,\mathrm{g}$ spadlo z výšky $h = 10\,\mathrm{cm}$, se kvůli pružině počáteční délky $l = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ a tuhosti $k = 50\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ odrazilo do výšky $h' = 6\,\mathrm{cm}$. Pokud Výfuček zdvihl ruku trochu výš, k odrazu již nedošlo; propiska se pouze převrátila a spadla.

Vyjádřete maximální výšku h_{max}, ze které Výfuček musí propisku shodit, aby se ještě odrazila do výšky h'_{max}. Víte, že při prodlužování a zkracování pružiny se nevratně přemění na teplo stejné množství energie. Toto množství je totožné při každém odrazu. Pokud se pružina zkrátí na délku $l_{\mathrm{min}} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$, propiska se zasekne. Výšku h'_{max} také vyjádřete.

Úloha V.5 ... Aladin ušetřil ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Výfuček byl ze svého nového létajícího koberce celý nadšený. Ještě když si jej pod paží nesl na nějaké klidnější místo, rozmýšlel se, jak se mu s ním asi poletí a jak rychlý koberec bude. Pomozte mu s jeho úvahami.



1. Jakmile se Výfuček rozletí, bude se koberec pohybovat konstantní rychlostí $v_0 = 200\,\mathrm{km/h}$. Jakou vzdálenost x pak Výfuček v této fázi letu urazí za čas $t_0 = 30\,\mathrm{min}$? Jakou vzdálenost urazí za obecný čas t? Matematicky řečeno, napište předpis funkce Výfučkovy uražené vzdálenosti v závislosti na čase $x(t)$.

2. Již jsme řekli, Výfučkova rychlost je v této fázi konstantní, jeho funkce rychlosti v závislosti na čase je $v(t) = v_0$. Vytvořte graf této funkce (s velkými dlouhými osami) a znázorněte v něm čas t_0 jakož i rychlost v_0. Jak lze z grafu pomocí geometrie určit, jakou vzdálenost Výfuček uletěl za čas t_0?

Výfučka však ještě zajímala akcelerace koberce a jeho další vlastnosti.

3. Jestliže koberec rovnoměrně zrychlí z nuly na sto (kilometrů v hodině) za 2,5 s, jaké je jeho zrychlení?

4. Napište předpis funkce rychlosti koberce v čase $v(t)$ a zhotovte její graf. Graficky odvoďte uraženou vzdálenost Výfučka za čas a zkontrolujte, že vše sedí tak, že vzdálenost změříte pro $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$.

Výfuček konečně došel na vhodné klidné místo a rozprostřel svůj koberec připraven vyrazit. Nastartoval a…koberec mu, jak se lidově říká, chcípl.

5. Jakou vzdálenost při tomto špatném startu urazil, trval-li celých pět sekund a rychlost koberce v čase lze zapsat funkcí

$$v = \sqrt{(2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - (t - 2{,}5\,\mathrm{s})^2 \cdot (1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})^2}\,?$$

Jistě vám pomůže si nakreslit graf této funkce. Třeba tak, že si nejprve vynesete pár jejích bodů. Výsledek uveďte v plné obecnosti, a pak teprve dosaďte za všechny konstanty, které se mohou vyskytnout.

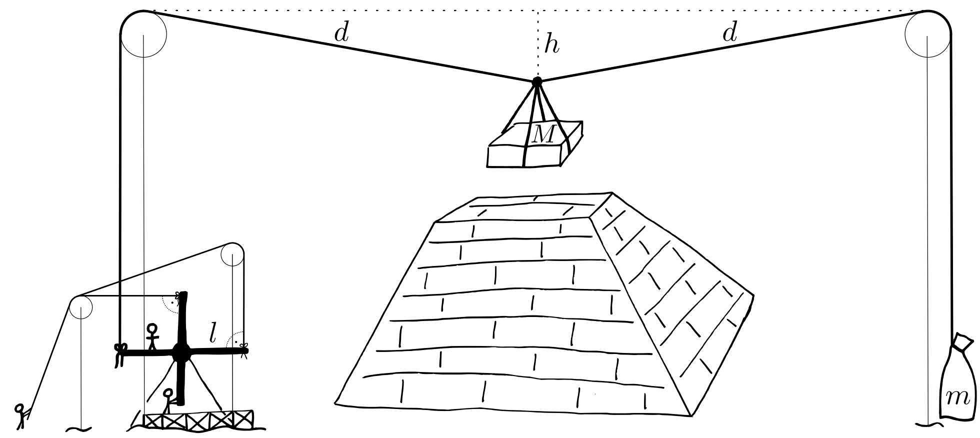
Úloha V.E ... V zimě v rýmě ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Nakonec se Výfučkovi přece jen povedlo nastartovat a mohl vzlétnout do Egypta. Během letu však poměrně foukalo, a tak se Výfuček nastydl a dostal rýmu. S hrůzou však zjistil, že mu všechny jeho papírové kapesníčky během letu navlhly a velmi snadno se tak protrhávají. Změřte, jak závažný tento efekt je.

Jinými slovy, změřte, jak velká síla je potřebná k protržení kapesníčku v závislosti na tom, na jak velké ploše působí. Naměřené hodnoty vyneste do grafu. Měření proveďte pro suchý i vlhký kapesníček a výsledky porovnejte. Do vašeho řešení nezapomeňte uvést, jakou značku kapesníčků jste při měření použili (aby totiž bylo měření replikovatelné, záleží na tom, kolik má kapesník vrstev atp.).

Úloha V.V ... Efekt egyptské efektivity ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček už byl skoro nad pyramidami, když měl koberec nehodu. A jak už to tak s poruchovými nadpřirozenými předměty bývá, přistál náš Výfuček v době, kdy se slavná pyramida teprve stavěla. Rozhodl se tedy ohromit faraona svými fyzikálními znalostmi a ukázal mu návrh svého dokonalého stavebního stroje.



Na obrázku vidíte Výfučkův náčrtek. Aby přesvědčil faraona, že se mu tento stroj vyplatí postavit, musel nejprve spočítat několik charakteristik:

1. Jakou silou tahá za kvádr o hmotnosti $M = 100\,\mathrm{kg}$ každé z lan, na kterých visí?
2. Jakou hmotnost m musí mít pytel zavěšený na konci jednoho z lan?
3. Jak velká je celková síla, kterou lano působí na velké kladky? A jakým směrem míří?
4. Jakou silou musí kvalifikovaný dělník tlačit do lopatky mlýnu ve vzdálenosti $l = 5\,\mathrm{m}$, jak těžký musí být kvalifikovaný dělník stojící na mlýnu ve vzdálenosti $l/2$ a jakou silou musí poslední kvalifikovaný dělník tahat za lana přivázaná k mlýnu ve vzdálenosti l?

Provaz je od kladky po kvádr dlouhý $d = 141{,}42\,\mathrm{m}$ a kvádr je na něj přivázán v hloubce $h = 36{,}60\,\mathrm{m}$ pod úrovní horních konců kladek. Celý stroj je takto v rovnováze, všechna přivázaná lana jsou kolmá na mlýn. Všichni dělníci pracují společně a námahu dělí mezi lopatky rovnoměrně. Jak bylo již ve Výfučtení naznačeno: *úlohu a hledané číselné hodnoty můžete určit také graficky za pomoci rýsování a přepočtu ve správném poměru.*

Výfučtení: Páky a kladky

Všichni občas přemýšlíme nad tím, jak něco funguje. Uvědomujeme si, že mechanismy schované za spoustou věcí jsou příliš složité na to, abychom je bez bližšího zkoumání a pečlivého studia pochopili. Samotné slovo složitý (cizím slovem komplexní) však znamená, že mechanismy jsou *složené* z více menších částí. Porozumění tedy můžeme dosáhnout, pokud zařízení *zjednodušíme* neboli rozložíme[2] na jednotlivé malé fungující celky. Spousta mechanismů jako např. hodinky svou složitost získává jen proto, aby se vešla na menší plochu nebo „zvládla víc“, přitom pokud jednotlivé součástky stroje zkoumáme zvlášť a v jejich vztazích, zjistíme, že se často nejedná o nic složitého. Jedním z mnoha základních mechanismů, ze kterých se skládají ty složitější, jsou páky a kladky, které patří mezi tzv. jednoduché stroje. Naleznete je všude: od houpačky na dětském hřišti až po raketu Saturn V.

Páky

Páky i kladky tedy patří mezi jednoduché stroje. Ty jsou v základním stavu v rovnováze a podle toho, jak rovnováhu porušujeme, se obvykle snaží do ní dostat zpět. V případě páky (ukázkovou páku můžete vidět na obrázku číslo 1), která je v rovnováze, musí být součet momentů sil na obou ramenech nulový. Tento fyzikální předpoklad znázorňujeme následující rovnicí:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = 0 \quad \text{neboli} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i = 0\,.$$

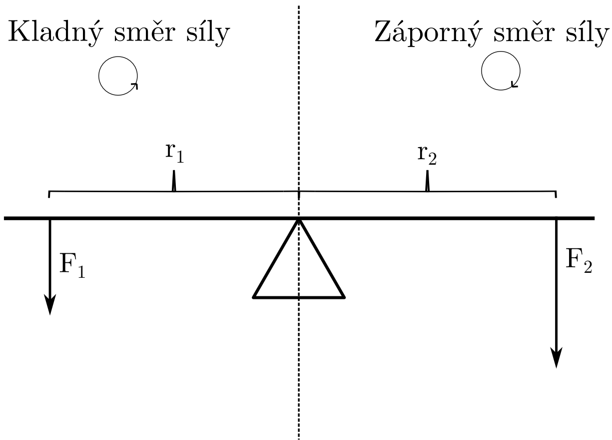
Rovnice vlevo říká, že součet všech momentů sil, které na páce působí a kterých je dohromady n, je roven nule. Na pravé straně máme ekvivalentní formulaci pomocí znaku velká sigma, které značí operaci suma, neboli „součet všech“ – sečteme všechny momenty sil s indexem i, který nabývá hodnot od 1 po n.

Moment síly je součinem síly působící kolmo na páku a její vzdálenosti od středu otáčení (u pák od podpěry), výsledný vzorec tedy vypadá takto: $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i r_i = 0$. Tady můžeme vidět velkou podobnost s Newtonovým prvním zákonem, který tvrdí, že těleso je v rovnováze, když je součet sil, které na něj působí, roven nule. Zde však používáme momenty sil a to má to svůj důvod. Záleží totiž, jak daleko od osy otáčení působíme, což si můžete sami ověřit. Zkuste např. otevřít dveře tak, že budete tlačit blízko pantů. To půjde hůře, než když budete tlačit daleko od nich.

[2] A tento rozklad nemusí být jen přiblížení, vždyť matematická analýza (neboli rozklad) je samostatná disciplína, kterou fyzikové hojně používají.

Jistě víte, že sčítáním samých kladných hodnot nulu nevyrobíme, ale my můžeme do našeho vzorce „vyrobit“ hodnotu zápornou. Zavedeme si totiž kladné a záporné směry. Jak se s nimi pracuje se dočtete níže, prozatím se jen dohodneme, že kladné jsou momenty, které se páku snaží otočit proti směru hodinových ručiček.

Máme dva druhy pák – jednozvratnou a dvojzvratnou. Běžným příkladem dvojzvratné páky je dětská houpačka. Má podpěru (ideálně uprostřed) a dvě ramena (obrázek 1). Když na každém z nich sedí jedno dítě, tíhové síly působící díky dětem na páku houpačky míří stejným směrem. Děti ale sedí na opačných stranách. Jedno tedy musí působit momentem síly v záporném směru a jeho sílu tedy opatříme znaménkem minus. Voilá – zvolíme-li správně těžké děti a posadíme-li je správně daleko od podpěry, může být součet momentů sil nulový a páka je v rovnováze. $F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot (-r_2) = 0$, což můžeme upravit na $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$.

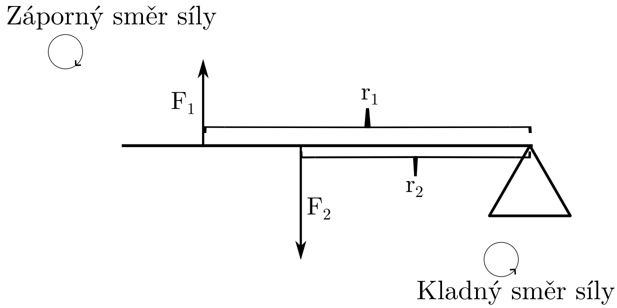


Obr. 1: Znázornění záporné a kladné síly ve dvojzvratné páce

Pěkným příkladem páky jednozvratné – s jedním ramenem – jsou již zmíněné dveře (obr. 2). Představte si pro ilustraci, že se s bratrem přetahujete o dveře (nedělejte to však, některé experimenty přenechme kandidátům na Darwinovu cenu). Vy chcete dveře zavřít, tlačíte je silou dopředu. Bratr chce do pokoje a potřebuje je otevřít, tak tahá silou zpět dozadu – používá sílu zápornou. $F_1 \cdot r_1 + (-F_2) \cdot r_2 = 0$, což lze upravit na $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$.

Možná se ptáte, proč v obou případech rozlišujeme na zápornou a kladnou pouze sílu. Základní úvaha, která nám vždy pomůže, je zvolit si, jaké znaménko odpovídá kterému směru otáčení. Tato volba je zcela na nás, ale musíme se jí držet při všech výpočtech. Síly, které působí po zvoleném směru, pak můžeme značit jako kladné, a silám v protisměru pak připíšeme mínus. Mínus můžeme místo síly připsat vzdálenosti, avšak rozhodně ne síle i vzdálenosti najednou, jinak by se znaménka vyrušila v součinu a nebylo by nijak zaznamenáno, že je moment opačný (naším cílem je zapsat, že je opačný celý moment). Naši volbu pro toto Výfučtení jsme v obrázku 1 a 2 naznačili kruhovými šipkami. Tedy bez ohledu na to, jaké znaménko bude mít výsledek vašich výpočtů, musíte vědět, kterému směru otáčení odpovídá.

To, jak jsou příklady uvedeny, má za následek, že bychom došli ke stejnému výsledku, i kdybychom všechna (tj. i nepsaná kladná) znaménka otočili – to by odpovídalo vynásobení celé



Obr. 2: Znázornění záporného a kladného směru síly na jednozvratné páce

rovnice faktorem −1. Může se však stát, že úloha bude kombinovat různé směry sil i vzdáleností. U složitějších soustav pák (nebo kladek), ke kterým se teprve dostaneme, budeme poctivě rozlišovat všechny směry tak, že vzdálenosti budou vždy kladné a síly budeme rozlišovat podle toho, zda působí vždy po, nebo proti směru hodinových ručiček.

Použití páky

Výše popsaný mechanismus páky můžeme využít například pokud chceme uzvednout těžký předmět. Představte si třeba stokilový balík postavený na jeden konec páky z obr. 1 ve vzdálenosti $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$ vlevo od středu. Když ho bude chtít běžný smrtelník zvednout, nepovede se mu to, poněvadž váží cca $50\,\mathrm{kg}$. Pokud si ale sedne nebo zatlačí na páku ve vzdálenosti $2r = 1\,\mathrm{m}$ napravo od středu, tak balík lehce vytlačí, protože mu k tomu bude stačit tíha $50\,\mathrm{kg}$. Platí tedy, že čím dál od středu páky působíme, tím menší silou nám stačí působit, abychom páku překlopili.

Kladky

S kladkami se obvykle setkáváme, pokud chceme něco zvednout, vytáhnout nebo někam dopravit, aniž bychom se hnuli z místa. Jde často o neprokluzující kola daného poloměru, jejichž osy jsou připevněny k pevné nebo pohyblivé základně a na která *klademe* např. provazy, což nám při jejich napnutí dovoluje sílu působící v jednom směru přenášet do směru jiného (např. horolezec jistič tím, že provaz přes kladku stahuje k sobě dolů, vytahuje svého kolegu nahoru a může tak brzdit jeho pád).

Běžná kladka má samozřejmě nenulovou hmotnost. My však budeme kladky včetně lan uvažovat jako nehmotné, dokonale tuhé a s ideálním (dostatečně velkým) třením.[3] Nejenže nám to značně zjednoduší výpočty, ale můžeme se pustit i do složitějších konstrukcí a soustav a přitom budeme moci všechny vzorce stále pohodlně upravovat.

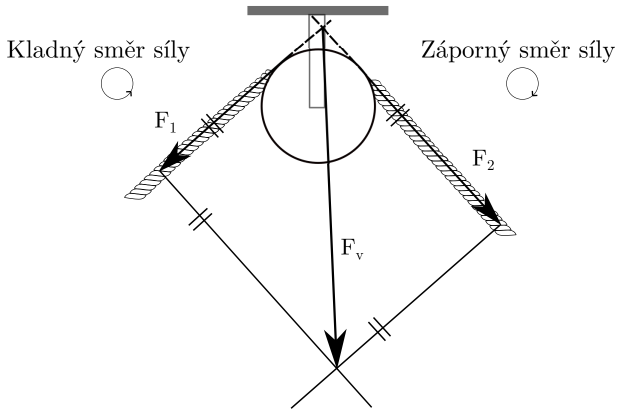
Kladky dělíme na dva druhy – pevné a volné.

[3] Tento předpoklad je přitom často s velkou přesností splněn. Např. váží-li náklad tunu a kladka kilo, pak je v porovnání s nákladem vskutku téměř nehmotná a provaz je na ni přitlačen tak dobře, že stěží dojde ke kluzu.

Pevné kladky

Pevná kladka, jak název napovídá, je pevně spojena s podkladem, stěnou, nebo čímkoliv, na čem drží tak, aby se její osa nepohnula, a sama se přitom mohla volně točit na místě. V rovnováze je právě tehdy, pokud na oba konce lana přes ni položeného působíme stejně velkou silou směrem od kladky. I zde můžeme určit kladný a záporný směr síly, ale tentokrát ne podle směru síly, ale podle směru, kterým síla kladku roztáčí. Považujme tedy sílu, která kladku roztočí proti směru hodinových ručiček, za kladnou, a po směru za zápornou. Nyní můžeme obdobně jako u pák psát $\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$. Na kladku samotnou potom působí tzv. vektorový součet těchto sil. Nejedná se však o součet stejný jako pro rovnováhu na kladce, protože síla nemá jen velikost, ale i směr, kterým působí.[4] Jak provést vektorový součet matematicky najdete ve Výfučtení první série pátého ročníku.[5]

Zde si ukážeme, jak je sečíst „graficky“ (vizte obrázek (3)). Dvě síly, kterými díky lanu působíme na kladku, si nakreslíme jako šipky. Každá má směr síly, kterou představuje, a její délka odpovídá ve zvoleném měřítku velikosti dané síly. Obě mají působiště (začátek šipky) ve stejném bodě. Šipky doplníme na rovnoběžník. Úhlopříčka tohoto rovnoběžníku spojující působiště a nově vzniklý bod má směr součtu sil a délkou v měřítku odpovídá velikosti výsledné síly působící na pevnou kladku. Velikost síly je pak možné v konkrétních případech vypočítat pomocí vzorců pro v náčrtu vzniklé geometrické útvary, jako délku úhlopříčky, kterou najdete v tabulkách.



Obr. 3: Grafické sečtení dvou sil působících na kladku

Pevná kladka se obvykle používá k tomu, abychom změnili směr působící síly. Když například chceme zvednout náklad, nemusíme působit silou směrem nahoru, stačí táhnout provaz přes kladku směrem dolů. Oproti tomu volná kladka nám práci může usnadnit, což si ukážeme v další sekci.

[4] Takovým veličinám jako síla říkáme vektorové.

[5] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r5/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf`

Volné kladky

Volná kladka je taková, která na laně visí (nahlížejte do obr. 4). Jeden konec lana je pevně přichycen (např. o zeď), za druhý lze libovolně tahat. Kladka vždy po laně sklouzne nejníže, kam může, čímž zajistí, že celá soustava bude osově souměrná a oba konce lana tedy budou s osou svírat stejný úhel a na kladku v rovnováze budou působit stejně velkými silami. Aby kladka na laně visela, musí na ni něco působit silou směrem dolů (například uprostřed zavěšené závaží silou tíhovou).

Uvažujme, že za volnou kladku taháme přímo vzhůru, neboli, že na obrázku níže je F_1 rovnoběžná s výslednou silou F_v. Pak stačí náklad působící silou F tahat poloviční silou $F/2$! Přitom tento předpoklad je v praxi velmi často splněn. Kde vězí ten háček, neporušuje se např. zákon zachování energie?

Zákon zachování energie se naštěstí neporušuje, protože předmět, který taháme nahoru, stoupá pomaleji. Přesněji řečeno dvakrát pomaleji. Abychom náklad zvedli o výšku h, musíme vytáhnout $2h$ lana, tedy celková vykonaná práce zůstává stejná.

Volná kladka má obvykle drobnou nevýhodu – musíme být výš než zvedaný předmět. Tento „nedostatek“ vyřešíme tak, že nad volnou kladku přidáme jednu pevnou, čímž vytvoříme kladkostroj. Zde jsou obvykle všechna lana mezi volnou a pevnou kladkou rovnoběžná, tedy nemusíme řešit rozklady sil, což nám výrazně usnadní výpočty. U nejjednoduššího kladkostroje visí volná kladka na dvou lanech, tedy každé lano působí polovinou síly potřebné k vyrovnání tíhové síly závaží. Pokud postavíme kladkostroj ze tří kladek, volná kladka visí na třech lanech, tedy lana působí silou třetinovou, při čtyřech kladkách visí na čtyřech lanech, síla bude čtvrtinová atd. Stejně velkou silou pak taháme za volný konec lana a stačí nám tedy málo, abychom závaží na kladce zavěšené uzvedli. Pomocí kladkostrojů tedy lze zvedat velmi těžké předměty s menší námahou.

Složitější, ale přesnější výpočet volné kladky

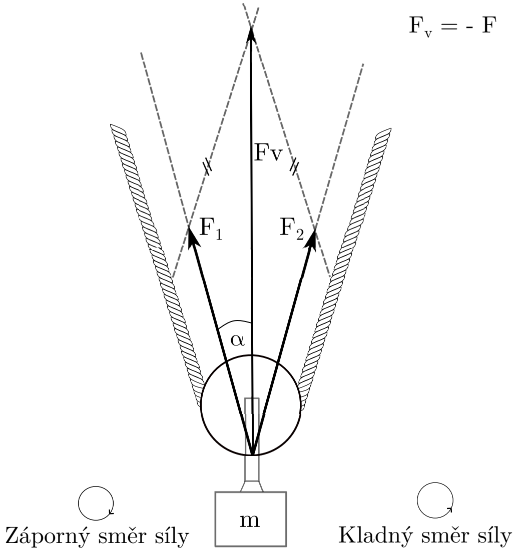
V této sekci si odvodíme, jakou silou musíme táhnout kladku, když neplatí, že F_1 je rovnoběžná s F_v. Protože je v klidu (v rovnováze), podle prvního Newtonova zákona je výslednice všech sil na ni působících nulová. To nastane, když lano působí celkově stejně velkou silou, jakou je kladka tažena dolů, ale v opačném směru. A tak jako jsme síly konců lan u pevné kladky skládali, nyní tu jednu celkovou rozložíme na složky jednotlivých lan. Sílu, kterou známe, si vyznačíme stejně jako v předchozím případě. Z jejího působiště vedeme polopřímky ve směru, v jakém potřebujeme, aby složky směřovaly. Tvar opět doplníme na rovnoběžník, jehož úhlopříčku tvoří známá síla. Délky stran rovnoběžníku v měřítku odpovídají velikosti sil a opět je lze dopočítat pomocí geometrických vzorců, které naleznete v tabulkách. Pro případ volné kladky jsme dostali kosočtverec, protože obě síly jsou stejně velké a svírají s původní silou stejný úhel α. Úhlopříčky tohoto útvaru jsou na sebe kolmé a navzájem se půlí. Pokud tedy goniometrickou funkcí dopočítáme délku poloviny druhé úhlopříčky[6] $c = (F/2)\operatorname{tg}\alpha$, můžeme velikost síly konce lana vypočítat Pythagorovou větou

$$F_1 = \sqrt{c^2 + \left(\frac{F}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)^2 + \left(\frac{F}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{F^2\operatorname{tg}^2\alpha + F^2}{4}}\,.$$

Speciálním případem jsou konce lana působící silou rovnoběžnou s celkovou silou působení lana, kdy po dosazení úhlu $\alpha = 0\,\mathrm{d}g$ ($\operatorname{tg} 0^\circ = 0$) dostaneme $F_1 = F/2$. Naopak úhel $\alpha = 90^\circ$ získat

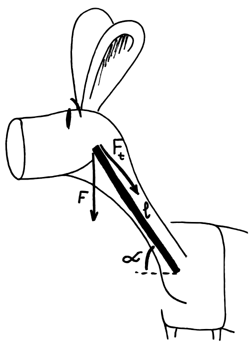
[6] První úhlopříčka má délku F odpovídající v měřítku velikosti síly.

nemůžeme. Zkuste si experimentálně ověřit, že pokud na sebevíc napnuté lano umístíte i jen lehoučký předmět, vždy se alespoň nepatrně prohne. Ani samotná funkce tangens není pro tento případ definovaná.[7]



Obr. 4: Grafický rozklad sil na volné kladce

A kde to všechno hledat?



Co se stane, když na páku, nebo lano hozené přes kladku budeme působit silou, kterou narušíme rovnováhu? Jako při každém silovém působení udělíme páce nebo lanu zrychlení (respektive úhlové zrychlení). Tím se tady však zabývat nebudeme a budeme předpokládat, že narušení rovnováhy bylo tak krátké, že uvedlo systém do rovnoměrného pohybu, ve kterém dle druhého Newtonova zákona v rovnováze setrvává. „A k čemu mi to bude?“

Každý už určitě slyšel: „Sedíš křivě, budou tě bolet záda.“ Běžně akorát ohrneme nos. Tak se nad onou větou trochu pozastavme. Kolik z vás má při počítání krk dopředu (přibližně pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ a ráno nadává, že ho bolí hlava? Můžou za to přetížené svaly na zadní straně krku a zad. Upínají se podél páteře, u ramen, pod hlavou a kdesi v polovině zad a zajišťují mimo jiné to, že nám intelektuálům nespadne hlava na klávesnici. Zjednodušme tedy celý krk na jednozvratnou páku tím, že zanedbáme drobné svaly mezi obratli (budeme předpokládat, že zajišťují, aby se krk neprohýbal). Na konci ji ve vzdálenosti l (délka krku) zatěžuje hlava s hmotností m. Hlava však působí silou F kolmo k zemi, nikoliv kolmo k páce. Sílu proto musíme rozložit.

[7] Pro výpočet úhlu α, známe-li $\mathrm{tg}\,\alpha$, má kalkulačka tlačítko tg^{-1}. Obdobná má pak i pro ostatní funkce.

V tomto případě potřebujeme nové síly rozkladu kolmo na páku a rovnoběžně s pákou. Jelikož jsou síly na sebe kolmé a známe úhel, který svírá páka se zemí, tedy i úhel tíhové síly hlavy a sil, na které ji rozkládáme, můžeme je přesně vypočítat goniometrickými funkcemi. Zajímá nás pouze ta, která je kolmá na páku $F_1 = mg\sin(45\,°) = mg/\sqrt{2}$ (krk pod tímto úhlem tvoří úhlopříčku čtverce). Obdobně rozložíme sílu F_t, kterou vyrovnávají páku svaly podél krku a zad. Abychom mohli pokládat krk za páku, řekli jsme, že všechno, co se upíná na jednotlivé obratle, zajišťuje, aby krk držel jako tyč. Zbývají nám tedy svaly (a části svalů) upínající se pouze na konci krku. Zde zvolíme velmi malou hodnotu úhlu, protože svaly jsou s krkem téměř rovnoběžné $F_2 = F_t\sin(10°)$. Doplníme do vzorce z výše uvedeného odstavce o pákách, přičemž i svaly, jejichž sílu chceme znát, se upínají až na konci krku skoro u hlavy $lmg\sin(45\,°) = lF_t\sin(10\,°)$. Rovnici vydělíme $l\sin(10\,°)$, čímž se zbavíme vzdálenosti, vyjádříme F_t a dosadíme čísla. Průměrná lidská hlava váží okolo $m = 4{,}5\,\mathrm{kg}$, ostatní jsou konstanty.

Výsledek? Vaše svaly vyrovnávající hlavu působí silou $F_t \doteq 179{,}8\,\mathrm{N}$. To je jako by na nich přímo k zemi visel dospělý klokan Parryův.[8] Tato hodnota je ale pouze přibližná, protože úhel byl zvolen také jako přibližný, charakterizující celou svalovou skupinu, v níž je však každé svalové vlákno napjaté v každém bodě trochu jinak a po celé své délce. Dosadíte-li trochu menší úhel, zjistíte, že hodnota velmi rychle poroste. Je tedy možné, že při čtení tohoto textu taháte mnohem těžší zvíře, pro představu to však stačí.

Ukázali jsme si tedy praktický příklad z anatomie. Zde však cesta počítání teprve začíná. Víte, jakou silou musíte působit na kabinku z půlky plného London Eye, abyste ho zastavili? Poradíme vám, že takové ruské kolo je vlastně soustava pák slepených „do hvězdičky“. Se směry můžete pracovat jako u kladek, a jak vypreparovat sílu kolmou na páku z jiné už také víte. Hurá tedy vyhledat rozměry, osázet kolotoč lidmi a můžete se pustit do výpočtů, výsledek stojí za to. Také by vás mohlo zajímat, proč mají klíče tak velkou část na konci. Jistě je to i pro lepší úchop, ale zkuste si spočíst, o kolik větší sílu byste museli vyvinout na odemykání velkým klíčem s poloviční „hlavičkou“. Dostali byste se domů? Umíte převedením kola na kladku spočítat, jak silné musí mít člověk na invalidním vozíku ruce, aby se vytlačil do kopce? To vše a mnohem více.

A co když vám řekneme, že teď umíte zdůvodnit, proč pravítko o hranu stolu zlomíte spíš uprostřed než na kraji? I v tak zdánlivě „nudné“ a „bezvýznamné“ části mechaniky jako jsou kladky a páky se skrývá vysvětlení fungování značné části světa.

Závěr

V tomto Výfučtení jsme představili tři důležité jednoduché stroje: páku, volnou kladku a pevnou kladku. Tyto stroje nám ulehčují vykonávání práce, byť celková vykonaná práce na určitý úkon (třeba zvednutí předmětu) je vždycky stejná. Stroje nám poskytují následující ulehčení:

Páka: pro zvednutí předmětu stačí působit menší silou, za to však musíme působit po delší dráze.

Pevná kladka: tento stroj mění směr, kterým silou musíme působit.

Volná kladka: volná kladka umožňuje zvedat předměty až dvakrát menší silou, musíme však tahat dvakrát více provazu.

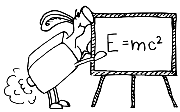
[8] Pro zájemce hmotnosti některých dospělých savců: `https://thewebsiteofeverything.com/animals/mammals/adult-weight.html`

Fungování strojů jsme si odvodili na principu Newtonova prvního zákona a pomocí rozkladu sil (tj. pomocí *principu superpozice*). V průběhu textu jsme zmínili bezpočet praktických uplatnění těchto strojů, ale i jejich výskyty v přírodě jako např. trapézové svaly. Jak jsme psali na začátku, z jednoduchých strojů se skládá mnoho strojů složitějších (ale i jevů), a proto je jejich pochopení důležité.

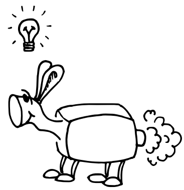
Důležité je nakonec poznamenat, že umíme-li přesně rýsovat, můžeme problém řešit i tehdy, pokud neumíme pracovat se vzorci pro vztahy mezi poměry stran a úhly. Dodržíme-li měřítko, kterým síly rýsujeme, můžeme měřit i v obrázku. (Obdobně jako v první a poslední úloze této série.)

Julie Weisová
`julca@vyfuk.mff.cuni.cz`

Soňa Husáková
`sona@vyfuk.mff.cuni.cz`



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Liščí ohon

5 bodů; průměr 4,00; řešilo 21 studentů

V soutěži kouzelníků zazářilo číslo se statickou elektřinou. Třením plastové (PVC) trubky o vlasy a následným přiložením trubky na plechovku kouzelník onu plechovku nabil záporně – přesunul na ni záporně nabité částice. Potom vzal plechovku jinou, třením nabitou tyč k ní jen zevnitř přiblížil, dotkl se plechovky zvenku prstem, a tak ji nabil kladně.

1. *Co by musel kouzelník udělat jinak, kdyby použil skleněnou tyčinku a třel ji o tvrdou gumu?*

2. *Jakým materiálem by musel třít kus silikonu, aby se po dotknutí silikonem plechovky tato plechovka nabila kladně?*

Pomůže vám triboelektrická řada, kde jsou materiály seřazeny podle toho, který „chce“ kladný (nebo záporný) náboj více. Pokud o statické elektřině ještě mnoho nevíte, podívejte se na náš seznam videí: `https://bit.ly/34EE6Zd`.

Obr. 5: Triboelektrická řada

Teoretické vysvětlení

Pro důkladný popis úvah vedoucích k řešení této úlohy si nejprve didakticky připomeňme základy nauky o elektřině.

Všechny materiály, se kterými se setkáváme, se skládají z velmi malých atomů. Jediné zrnko písku jich obsahuje řádově 10^{21} (triliardy). Tyto atomy se vyskytují v několika druzích (prvcích), které jsou různě pospojovány do molekul (u písku je to obvykle oxid křemičitý SiO_2. Písek je tak složen převážně z těchto molekul, které obsahují po třech atomech – dvou atomech kyslíku O a jednom atomu křemíku Si).

Ale i atomy se dají dále dělit. Jsou složené z jádra a obalu, přičemž v jádře se nacházejí další částice – protony a neutrony, zatímco v obalu se nacházejí elektrony. Protony jsou mnohem těžší než elektrony, a tak tvoří většinu z malinké hmotnosti atomu. Podstatný je však vztah mezi protony a elektrony. Podobně jako se na dálku přitahují magnety, také elektrony a protony se (téměř záhadně) přitahují. Zároveň víme, že elektrony se s ostatními elektrony odpuzují, stejně to mají i protony s ostatními protony (proto mimochodem v jádře atomu musí působit i jiné, jaderné síly, které udrží odpuzující se protony pohromadě).

To znamená, že tu máme dva druhy částic, které se v rámci druhu odpuzují a mezi druhy přitahují. Tyto dva druhy nazveme *kladný* a *záporný* a úplnou libovůlí (spolu s respektem k zavedené praxi) si určíme, že elektrony jsou tím záporným druhem.

Zmíněné silové působení je úměrné množství částic a nezávisí na jejich hmotnosti, přičemž se vzdáleností klesá podobně jako třeba gravitační síla (v kosmickém prostoru je trochu slabší než na Zemi). Protože však klesá podle stále stejné zákonitosti a týká se stejných částic, můžeme ho tak odlišit od jiných zvláštních silových působení v přírodě – označíme si jej zvlášť jako působení *elektrické* (od magnetického se liší v mnoha ohledech, které tu ale teď nebudeme probírat). Po těchto úvahách tušíme, proč říkáme protonům *kladně elektricky nabité částice* a elektronům *záporně elektricky nabité částice.*

S těmito znalostmi už je vysvětlení úlohy jednoduché. V každém atomu je malá část elektronů jen slabě vázána k jádru a stačí málo, aby byly od atomu odtrženy a zachyceny v jiné látce. *Náboj* označíme jako celkovou bilanci mezi elektrony a protony – pokud převažují protony (tedy *kladně* elektricky nabité částice), bude náboj kladný, pokud převažují elektrony, bude náboj záporný. Při stejném počtu protonů a elektronů bude náboj neutrální.

Přesun elektronů běžně probíhá, třeme-li o sebe různé povrchy. Když se řekne, že vzniká „statická elektřina“, znamená to, že jsme třením vyvolali právě tento přesun náboje, a jeho přebytek či nedostatek pak vytvoří již zmíněný elektrický náboj.

Jinými slovy: za normálních podmínek se protony a elektrony spolu ruší a navenek se materiál zdá bez náboje. Jsou-li z něj však odvedeny elektrony – např. třením, pak se v něm nachází víc protonů než elektronů a materiál je tak (alespoň na povrchu) nabitý kladně. I když na něj nemusí elektrony z druhého materiálu být schopné přeskočit, pořád je zde působení na dálku, a proto se třeba balonek po tření o vlasy přilepí ke zdi. Tomuto jevu, kterému se lidově říká „statická elektřina“, učení říkají jev *triboelektrický* (řecká předpona *tribo-* značí vztah ke tření).

Je důležité si pamatovat, že jediné, co se přesouvá, jsou elektrony, zatímco protony, které sedí stále v jádrech atomů, si ničeho nevšímají a zůstávají na svých místech. Jediná otázka při tření dvou různých materiálů je, z kterého na který se ony elektrony přesouvají – a právě pro odpověď na tuto otázku nám slouží zmíněná *triboelektrická řada* v zadání úlohy.

Čteme z ní jednoduše – vidíme například, že polyester je napravo od lidské kůže. Pokud tedy budeme izolováni od země, stačí, abychom si zatancovali v oblečení z umělých vláken, a naše kůže předá elektrony našemu oblečení. Pak po určitou chvíli, než se elektrony vrátí samovolně zpátky na naši kůži ze vzduchu, jsme nabití kladně a dostaneme elektrický šok[9] dotykem čehokoli, co nám může chybějící elektrony dodat: tělo kamaráda, kovový nábytek, nebo třeba radiátor. Nemůžeme si je však snadno vzít zpět z onoho oblečení, protože to špatně vodí elektrický proud, a dalším třením bychom situaci ještě zhoršili.

Řešení a závěr

Plast PVC je v naší řadě napravo od vlasů, a proto byly elektrony z vlasů kouzelníka předány trubce. Elektrony se však odpuzují, a protože jich je na trubce přebytek, rozprostřou se i do kovové plechovky, která tak získá (oproti počátečnímu stavu) záporný náboj. Aby druhou plechovku nabil kladně, trubku k ní jen přiblížil a plechovku chytil prstem. To znamená, že využil odpudivého působení elektronů – elektrony z tyče vyhnaly elektrony z plechovky na ruku. Tím, že plechovku chytil, umožnil, aby elektrony z plechovky, odpuzované přebytkem elektronů v trubce, utekly přes jeho tělo pryč. Když pak plechovku pustil, musela zůstat kladná, protože měla nutně méně elektronů než předtím. Trubkou se plechovky nedotkl hlavně proto, aby ji opět nenabil záporně tak, jako to udělal předtím s první plechovkou.

Tvrdá guma je v řadě uprostřed, avšak to na úvaze nic nemění. Stále je důležité jen to, že je napravo od skla. To znamená, že kouzelník může provést svůj trik úplně stejně, jen sklo použije místo vlasů a místo PVC trubky gumu. Aby byl efekt měřitelný, pravděpodobně ho bude od tření bolet ruka, protože styčná plocha mezi sklem a gumou je mnohem menší než mezi vlasy a PVC, a náboj se tak hromadí pomaleji.

Nakonec odpověď na poslední otázku: plechovka se nabije kladně, pokud bude mít kam předávat elektrony a po ukončení dotyku bude mít nedostatek elektronů. Ty půjdou přirozeně do kladně nabitého prostředí, kterým má být onen silikon. Abychom však silikon nabili kladně, máme jen jednu možnost, a to třít jej jediným materiálem, jenž je už na kraji celé řady, a tím je teflon. Teflon známe jako krycí materiál na povrchu nepřilnavých pánviček, nicméně pro tyto experimenty se také prodávají teflonové tyče, se kterými se jednoduše manipuluje.

Daniel Slezák
`dans@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.2 ... Limonádový Dan

5 bodů; průměr 3,61; řešilo 51 studentů

Dan si při sledování svého oblíbeného filmu Limonádový Joe vzpomněl, jak si v létě za deštivého dne koupil svoji oblíbenou Kolalokovu limonádu. Intenzita deště tehdy byla $R = 1\,\mathrm{mm\cdot min^{-1}}$ (za minutu dosáhla nově spadlá vrstva nevsáknuté vody výšky jednoho milimetru). Dan má limonádu rád v kelímcích o poloměru $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ a nejraději ji upíjí pravidelně každých deset minut.

Kolik limonády musí takto pravidelně upíjet, aby hladina v kelímku zase klesla na úroveň před deseti minutami, tedy mu vlastně neubývala? Jestliže si koupil $V_0 = 3\,\mathrm{dl}$ limonády, která je 50% roztokem chutné složky ve vodě, určete, za jak dlouho nebude Dan chtít limonádu pít. Jeho mez chutnosti pro limonádu (nejnižší hodnota koncentrace, při které mu ještě chutná) je už na $C_\mathrm{h} = 45\,\%$.

Počítejte s tím, že hned po nákupu limonády Dan nejprve čeká deset minut a až pak upije.

[9] Elektrický šok není nic jiného než velmi rychlý přesun elektronů.

Chceme zjistit, kolik limonády musí Dan vypít, aby se hladina po dešti dostala na původní hodnotu. Hledáme tak v podstatě objem vody, která naprší za 10 minut. Tento objem bude záviset na dvou veličinách: na ploše S, na které déšť sbíráme, a výšce h, o kterou stoupne hladina v kelímku. To lze zapsat matematicky následovně:

$$V = Sh\,.$$

Tyto veličiny si ovšem musíme nějak vyjádřit i pomocí nám známých veličin. Vzhledem k tomu, že jsou kelímky kruhového tvaru, bude pro plochu S platit vzorec pro obsah kruhu $S = \pi r^2$.

Výšku vody h vyjádříme z intenzity deště. Pokud máme intenzitu $R = 1\,\mathrm{mm{\cdot}min^{-1}}$, znamená to, že za každou jednu minutu naprší jeden milimetr vody. Pokud chceme zjistit, o kolik se zvýší hladina za určitý čas, musíme intenzitu tímto časem vynásobit, neboli platí $h = Rt$.

Když dosadíme S a h do předchozího vztahu, získáme rovnici

$$V = \pi r^2 Rt\,,$$

ve které již známe všechny proměnné a můžeme je dosadit.[10]

$$V = \pi \cdot (2{,}5\,\mathrm{cm})^2 \cdot 0{,}1\,\mathrm{cm{\cdot}min^{-1}} \cdot 10\,\mathrm{minut}$$
$$V \doteq 19{,}63\,\mathrm{cm}^3$$

Dan po 10 minutách musí vypít $V \doteq 19{,}63\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}196\,3\,\mathrm{dl}$ limonády.

Nyní přejděme k výpočtu toho, jak dlouho může Dan limonádu pít, aby mu stále chutnala. Pokaždé, když do sklenice naprší, koncentrace chutné složky v limonádě se zmenší. Když se poté Dan napije, upije nejen vody, ale také samotné šťávy. To sice koncentraci nezmění, ale změní to celkový objem šťávy, který se ve sklenici nachází. Tím ovlivní budoucí ředění, protože se již nebude ředit stejný objem šťávy.

Změnu koncentrace při napršení do kelímku můžeme vyjádřit obecně pro C_1 a C_2, kde C_1 je počáteční koncentrace po předchozím upití (tj. ve sklenici je objem V_0) a C_2 je koncentrace po napršení, ale před následujícím upitím (tj. ve sklenici je objem $V_0 + V$).

Pokud začínáme s koncentrací C_1 a objemem V_0, musí být objem samotné šťávy, která se nachází v roztoku, C_1V_0. Koncentrace se přidáním vody zmenší. Když chceme vyjádřit novou koncentraci C_2, musíme objem chutné složky vydělit celkovým objemem před napitím (ale po napršení), což je $V_0 + V$. Z toho následně získáváme výslednou koncentraci C_2 jako

$$C_2 = \frac{C_1 V_0}{V_0 + V}\,.$$

Tím jsme si vyjádřili, jak se po každých 10 minutách změní koncentrace oproti té předchozí. Získání času, kdy limonáda nebude dostatečně koncentrovaná, je nyní otázkou aplikování této rovnice jednotlivě pro každých 10 minut. Pro zjednodušení si ovšem můžeme pomoci tabulkovými programy, jakými jsou například Excel nebo OpenOffice Calc, do kterých můžeme rovnici pouze zadat a ony nám již vypočítají jednotlivé koncentrace.

Z tabulky 1 můžeme vidět, že koncentrace limonády klesne pod $C_\mathrm{h} = 45\,\%$ už po 20 min. Dan se tak napije s chutí jen jednou, protože podruhé už bude mít limonáda v sobě málo šťávy.

Adam Krška
`adam@vyfuk.mff.cuni.cz`

[10] Samozřejmě nesmíme zapomenout převést hodnoty na stejné jednotky.

$\frac{t}{\text{min}}$	C
0	50,00 %
10	46,93 %
20	44,05 %
30	41,34 %
40	38,80 %
50	36,42 %
60	34,18 %
70	32,08 %
80	30,11 %

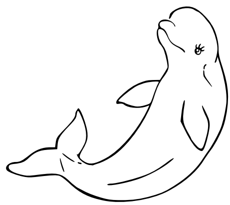
Tab. 1: Koncentrace limonády v průběhu času.

Úloha III.3 ... Běluha speleolog

6 bodů; průměr 5,08; řešilo 53 studentů

Běluha si při plavbě v moři všimla ve skalní stěně jeskyně, ve které ještě nebyla, a ráda by ji prozkoumala (nedělá jí to problém, protože správná běluha umí plavat i pozpátku).

Rozhodla se předtím změřit její délku, a proto společně vyslala dva zvukové signály šířící se rychlostí c. První z nich se odrazil od skalní stěny, druhý od vzdáleného konce jeskyně a oba se vrátily zase zpět. Pokud běluha naměřila hloubku jeskyně l, jaký vnímala časový rozdíl mezi odraženými signály T? Počítejte s $c = 1\,500\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $l = 75\,\mathrm{m}$.



Označme si vzdálenost běluhy od skalní stěny s_1 a vzdálenost běluhy od konce jeskyně s_2. Hloubka jeskyně je tak $l = s_2 - s_1$.

První signál, který běluha vyšle, k ní od skalní stěny dorazí za čas

$$t_1 = \frac{2s_1}{c}\,.$$

Tento vzoreček je pouze základní vztah mezi rychlostí, časem a dráhou během rovnoměrného přímočarého pohybu. Dráha s_1 je ještě vynásobená dvěma, protože signál se k běluze musí vrátit zpět po stejné dráze, jako putoval tam.

Obdobně můžeme určit i dobu putování signálu od konce jeskyně jako

$$t_2 = \frac{2s_2}{c}\,.$$

Nakonec časový rozdíl mezi odraženými signály je $T = t_2 - t_1$. Nyní už nám nezbývá nic jiného, než postupně do tohoto vzorečku dosadit vztahy, na které jsme přišli předtím. Když dosadíme do posledního vzorce jednotlivé časy, dostaneme

$$T = \frac{2(s_2 - s_1)}{c}$$

a vidíme, že z prvního vzorce teď jednoduše můžeme dosadit $l = s_2 - s_1$ jako hloubku jeskyně. Dostáváme tak

$$T = \frac{2l}{c}\,.$$

Nyní již máme v našem vzorečku pouze hledanou časovou prodlevu a veličiny, které známe ze zadání. Můžeme tak dosadit číselné hodnoty, jejichž jednotky není potřeba upravovat (jelikož veličiny už jsou vyjádřeny v základních jednotkách), a zjistíme, že prodleva je

$$T = \frac{2 \cdot 75\,\mathrm{m}}{1\,500\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 0{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Běluha tedy naměřila časovou prodlevu asi 0,1 s mezi odraženými signály.

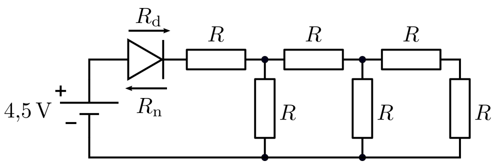
Karolína Letochová

Úloha III.4 ... Obvody s diodou

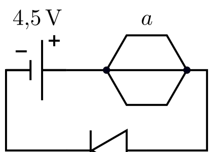
7 bodů; průměr 4,53; řešilo 38 studentů

1. *Na prvním obrázku vidíme obvod se stejnými odpory $R = 100\,\Omega$ a diodou. Pokud touto diodou prochází proud alespoň $I_\mathrm{d} = 20\,\mathrm{mA}$, rozsvítí se. Dioda má odpor $R_\mathrm{d} = 1\,\Omega$ v povoleném směru proudu (tj. tam, kam ukazuje trojúhelník) a odpor $R_\mathrm{n} = 10\,000\,\Omega$ ve směru opačném.*

   - *Bude dioda svítit, pokud je napětí na zdroji $U_\mathrm{z} = 4{,}5\,\mathrm{V}$?*
   - *Pokud bychom diodu zapojili opačně, jaké napětí by muselo být na zdroji, aby dioda svítila?*



2. *Na druhém obrázku máme jako odpor pravidelný šestiúhelník s úhlopříčkou. Je vyroben z odporového drátu s délkovým odporem $\varrho_l = 1\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}^{-1}$. Jak nejvýše dlouhá může být jeho strana a, aby při připojení ke zdroji o napětí U_z dioda svítila? Uvažujte obě zapojení diody. Odpor vodičů, kterými připojíme zdroj a diodu k šestiúhelníku, zanedbejte.*



1. Nejdříve určíme celkový odpor ze všech odporů R – diodu máme k těmto odporům sériově zapojenou, takže se jí budeme zabývat až na konec. Budeme postupně nahrazovat rezistory tak, aby se jejich celkový odpor nezměnil, přičemž postupujeme zprava.

Připomeneme si, že pokud jsou dva rezistory sériově, tak stačí jejich odpory sečíst, pokud jsou paralelně, pak platí vzorec

$$\frac{1}{R_\mathrm{v}} = \frac{1}{R_\mathrm{x}} + \frac{1}{R_\mathrm{y}},$$

kde R_v je výsledný odpor a R_x a R_y jsou dílčí paralelně zapojené odpory.

Dva rezistory nejvíce vpravo jsou zapojeny do série, můžeme je tak nahradit jedním rezistorem o odporu $2R$. Poté jsou spojeny s jedním rezistorem paralelně, takže celkově tuto soustavu tří rezistorů nahradíme jedním o odporu

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{2R}{3}.$$

K tomuto jednomu myšlenému rezistoru máme opět připojen jeden sériově – dohromady mají odpor $5R/3$. Další je opět paralelní, takže máme

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{3}{5R} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{5R}{8}.$$

A konečně k tomuto dalšímu myšlenému rezistoru je opět sériově připojen jeden poslední rezistor. Celkově tak má soustava rezistorů odpor

$$R_\mathrm{c} = R_2 + R = \frac{13R}{8} \doteq 163\,\Omega.$$

Nyní se dostaneme k zodpovězení otázek.

- Dioda bude svítit, pokud jí prochází alespoň proud I_d. Musíme tedy vypočítat procházející proud a porovnat ho s I_d. Proud vypočítáme podle Ohmova zákona (nesmíme k celkovému odporu rezistorů zapomenout připočíst odpor sériově zapojené diody)

  $$I = \frac{U_\mathrm{z}}{R_\mathrm{c} + R_\mathrm{d}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{163\,\Omega + 1\,\Omega} \doteq 27\,\mathrm{mA}.$$

  Proud procházející obvodem je vyšší než I_d, takže dioda se rozsvítí.

- Nyní máme zadaný vlastně minimální proud, jaký musí téct obvodem – jedná se o proud I_d, při kterém se dioda rozsvítí. Opět vyjdeme z Ohmova zákona, ale tentokrát se ptáme na napětí

  $$U = (R_\mathrm{n} + R_\mathrm{c})I_\mathrm{d} = (10\,000\,\Omega + 163\,\Omega) \cdot 0{,}02\,\mathrm{A} \doteq 203\,\mathrm{V}.$$

V obou otázkách byl vždy jeden z odporů zanedbatelný – v první to byl odpor diody, ve druhé odpory rezistorů.

2. Čím bude délka strany větší, tím bude i odpor větší, takže obvodem bude při stálém napětí procházet menší proud. Při minimální hodnotě proudu budeme mít k dispozici maximální odpor – touto hodnotou je právě takový proud, aby dioda ještě svítila, tedy proud I_d.

   Nejdříve musíme určit odpor šestiúhelníku. Všimneme si, že se jedná o paralelní zapojení tří drátů – horní a spodní mají délku $3a$ (neboť jsou tvořeny třemi stranami šestiúhelníku) a prostřední má délku $2a$ (neboť úhlopříčka v šestiúhelníku má délku $2a$).

Odpory těchto drátů jsou jednoduše $R_\mathrm{h} = R_\mathrm{s} = 3a\varrho_l$ a $R_\mathrm{p} = 2a\varrho_l$. Celkový odpor je tak

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{R_\mathrm{h}} + \frac{1}{R_\mathrm{s}} + \frac{1}{R_\mathrm{p}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{c} = \frac{6a\varrho_l}{7}.$$

Nyní máme rozlišit dva případy zapojení diody.

- Dioda je správně zapojena. Máme tak rovnici

$$I_\mathrm{d} = \frac{U_\mathrm{z}}{R_\mathrm{c} + R_\mathrm{d}},$$

do které dosadíme a následně vyjádříme a

$$\frac{6a\varrho_l}{7} = \frac{U_\mathrm{z}}{I_\mathrm{d}} - R_\mathrm{d} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{7\,(U_\mathrm{z}/I_\mathrm{d} - R_\mathrm{d})}{6\varrho_l} = \frac{7\,(4{,}5\,\mathrm{V}/0{,}02\,\mathrm{A} - 1\,\Omega)}{6 \cdot 1\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}^{-1}} \doteq 260\,\mathrm{m}.$$

Strana šestiúhelníku může být tedy velmi velká.

- Dioda je opačně zapojena. Máme tak rovnici

$$I_\mathrm{d} = \frac{U_\mathrm{z}}{R_\mathrm{c} + R_\mathrm{n}},$$

ze které stejně jako v předchozím případě vyjádříme a dosadíme

$$a = \frac{7\,(U_\mathrm{z}/I_\mathrm{d} - R_\mathrm{n})}{6\varrho_l} = \frac{7\,(4{,}5\,\mathrm{V}/0{,}02\,\mathrm{A} - 10\,000\,\Omega)}{6 \cdot 1\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}^{-1}} \doteq -11\,400\,\mathrm{m}.$$

Tento výsledek je zřejmě nesmyslný – délka strany nemůže být záporná. Kde se tedy stala chyba?

Je to tím, že jsme modelovali odpor šestiúhelníku nějakým výrazem, ale neomezili jsme si definiční obor (tedy že délka strany musí být nezáporná). Toto se ve fyzice často stává a musíme umět interpretovat výsledek správně (například při řešení kvadratické rovnice nám často vyjdou dva kořeny, z nichž jen jeden dává smysl).

Ve velké většině případů můžeme postupovat tak, že pokud nám výsledek nedává smysl (tedy vyjde například délka či čas záporně), tak ho jednoduše škrtneme a prohlásíme, že je špatný a že úloha pro takto zvolené hodnoty proměnných nemá řešení.

Takže kdybychom chtěli, aby dioda svítila opačně zapojená při napětí U_z, museli bychom snížit její odpor R_n – i pokud totiž do obvodu nedáme žádný šestiúhelník, hodnota proudu v obvodu bude ještě $U_\mathrm{z}/R_\mathrm{n} \doteq 0{,}45\,\mathrm{mA}$, čímž se dioda nerozsvítí. Pokud navíc přidáme odpor šestiúhelníkem, proud bude ještě nižší.

Robert Gemrot

Úloha III.5 ... Jeskyně a jídlo

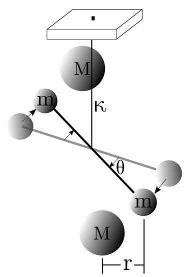
7 bodů; průměr 4,61; řešilo 18 studentů

Na konci osmnáctého století jeden velice stydlivý muž jménem Henry Cavendish jako první člověk přesněji změřil tzv. gravitační konstantu G, která figuruje[11] *v Newtonově gravitačním zákoně.*

K měření využil velmi přesné tzv. torzní váhy (viz obrázek), v nichž jsou konce lehkého vodorovného torzního ramena zatížené kuličkami o hmotnosti m. K těmto oběma koncům jsou ve vzdálenosti r přiblíženy dvě těžší koule o hmotnostech M. Na obou tak vzniká moment síly daný gravitační přitažlivostí mezi malými a velkými koulemi. Rameno je ve svém těžišti zavěšeno tzv. torzním závěsem, což je kterýkoli pevně ukotvený drát či tyč, který se při otáčení ramena kroutí. Jeho krut vytváří protichůdný moment síly, který je přímo úměrný torzní konstantě vlákna κ a úhlu stočení mezi jeho konci θ (neboli úhlu pootočení celého ramena) v radiánech.

1. *Sestavte rovnici pro působící síly/momenty, vyjádřete z nich gravitační konstantu a upravte ji tak, aby fungovala, kdybychom θ měřili ve stupních.*

2. *Uvažujte, že všechny veličiny až na měřený úhel θ a samotnou konstantu G známe přesně. Nechť $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $M = 10\,\mathrm{kg}$, $r = 10\,\mathrm{mm}$ a přibližná hodnota úhlu je $\langle\theta\rangle = 0{,}2°$. Jaká by musela být délka celého ramena L, abychom při 1% relativní nejistotě měření úhlu dosáhli 1% nepřesnosti určení gravitační konstanty?*[12] *Vztáhněte ji k již známé přesné hodnotě získané jinou metodou: $6{,}674\,3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$.*



Obr. 6: Zjednodušené schéma torzních vah

1. Začněme určením momentu síly gravitační, tedy té, kterou na sebe působí velká a malá koule. Pro moment síly obecně platí

$$M = Fd\sin\alpha\,,$$

kde F je síla působící ve vzdálenosti d od osy rotace a α úhel, který svírá vektor síly F s vektorem r. Protože je ale úhel α u torzních vah téměř pravý, můžeme použít i zjednodušený vztah pro moment síly

$$M = Fd\,.$$

[11] I když se ve škole často setkáte se symbolem kappa (κ), tak ve vědě (a zejména teorii relativity, která se gravitací nejvíce zabývá) se již více používá symbol G.

[12] Pro práci s nejistotami vám může pomoci náš tahák: `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/jak_resit/tahak.pdf`.

Jelikož se osa otáčení torzního ramena nachází přesně v jeho středu, bude vzdálenost koulí, a tím pádem i působících sil od osy, rovna polovině jeho délky:

$$d = \frac{L}{2}\,.$$

Poněvadž se malé koule nachází na obou stranách torzního ramena a na obě působí velké koule stejnou silou a ve stejném směru, bude celková síla, která nutí rameno k rotaci, rovna dvojnásobku síly gravitační:

$$F = 2F_{\mathrm{G}}\,.$$

Protože je ale gravitační síly dvojnásobek a délky torzního ramena naopak jen polovina, dvojky se vykrátí a moment sil, který roztáčí torzní rameno, je tedy roven:

$$M_1 = F_{\mathrm{G}} L\,,$$

přičemž gravitační sílu F_{G} vypočítáme pomocí Newtonova gravitačního zákona, jenž zní

$$F_{\mathrm{G}} = G\frac{Mm}{r^2}\,,$$

kde r je vzdálenost těžišť velké a malé koule, kterou známe ze zadání. Důležité je, že jsme již přidali gravitační konstantu G do vztahů. Následně dosadíme gravitační sílu do rovnice pro moment síly:

$$M_1 = GL\frac{Mm}{r^2}\,.$$

Aby se torzní rameno vyrovnalo do pozice, při které je otočeno o úhel θ, musí se protichůdný moment síly (protichůdnost vyjádříme zápornou hodnotou momentu) vyrovnat momentu gravitační síly

$$M_1 + M_2 = 0\,,$$

kde M_1 je moment gravitační síly a M_2 protichůdný moment síly vyvíjený torzním závěsem. Pokud nebude závěs namáhán za svou mez pružnosti (tedy pokud nebude nevratně deformován), budou platit již vyřčené vztahy ze zadání, tedy že je protichůdný moment síly přímo úměrný torzní konstantě závěsu κ a úhlu stočení θ v radiánech:

$$M_2 = -\kappa\theta\,.$$

Pokud tedy porovnáme oba momenty, získáme rovnici

$$GL\frac{Mm}{r^2} = \kappa\theta\,,$$

ze které určíme vztah pro gravitační konstantu

$$G = \frac{\kappa\theta r^2}{MmL}\,.$$

Problém je v tom, že úhel stočení θ musí být vyjádřen v radiánech (jelikož torzní konstanta se uvádí pro radiány) a my jej máme mít vyjádřený ve stupních. Naši hodnotu ve stupních tak musíme uměle převést na hodnotu v radiánech, aby rovnice platila.

Při převodu ze stupňů na radiány nám vzniká konstanta πrad/180° (jelikož πrad odpovídá 180° a chceme, aby se stupně zkrátily a aby radiány zůstaly). Máme tedy $\theta = \theta_\mathrm{d} \cdot \pi/180$, kde θ je v radiánech a θ_d je ve stupních. Můžeme tak dosadit

$$G = \frac{\pi}{180} \frac{\kappa \theta_\mathrm{d} r^2}{MmL} \,.$$

2. Pro přehlednost si schovejme všechny přesně známé veličiny použité ve vztahu pro gravitační konstantu (ze kterého budeme vycházet) za konstantu, kterou si označíme k

$$k = \frac{\pi}{180} \frac{\kappa r^2}{Mm} \,.$$

Potom můžeme zapsat, že

$$G = \theta_\mathrm{d} \frac{k}{L} \,.$$

V následujících výpočtech budeme používat dvě jednoduchá pravidla. Prvním je, že pokud platí vztah

$$a = kb \,,$$

kde a je závislá veličina, k je číslo bez nejistoty (tedy konstanta) a b je nezávislá veličina, potom pro jejich (normální) nejistoty platí

$$u_a = k u_b \,.$$

Druhým je vztah pro relativní nejistotu

$$\delta_a = \frac{u_a}{\langle a \rangle} \,.$$

Díky prvnímu pravidlu platí mezi nejistotami G a θ_d následující vztah:

$$u_G = u_{\theta_\mathrm{d}} \frac{k}{L} \,,$$

což díky druhému pravidlu přepíšeme pomocí relativních nejistot:

$$\delta_G \langle G \rangle = \delta_{\theta_\mathrm{d}} \langle \theta_\mathrm{d} \rangle \frac{k}{L} \,.$$

Dostali jsme rovnici, která říká, že pokud chceme měřit G s nejistotou δ_G o velikosti jednoho procenta a máme k dispozici aparaturu, která dovoluje měřit úhel s nejistotou $\delta_{\theta_\mathrm{d}}$ (v našem případě taktéž jedno procento), tak vše musíme kompenzovat odpovídající délkou vah L. Z toho si vyjádříme ono potřebné L a dosadíme za konstantu k

$$L = k \frac{\delta_{\theta_\mathrm{d}} \langle \theta_\mathrm{d} \rangle}{\delta_G \langle G \rangle} = \frac{\pi}{180} \frac{\kappa r^2 \delta_{\theta_\mathrm{d}} \langle \theta_\mathrm{d} \rangle}{\delta_G \langle G \rangle Mm} \,.$$

Nakonec dosadíme hodnoty ze zadání:

$$L = \frac{\pi}{180} \frac{2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m} \cdot (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 \cdot 1\,\% \cdot 0{,}2}{1\,\% \cdot 6{,}674\,3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{kg}} \doteq 1{,}2\,\mathrm{m} \,.$$

Aby byly splněny zadané podmínky pro relativní nejistoty gravitační konstanty a úhlu stočení, musí být délka torzního ramena $L \doteq 1{,}2\,\mathrm{m}$.

Můžeme si všimnout, že délka ramena je dost malá na to, aby se vešla např. do místnosti. Chyba experimentu bude pravděpodobně větší díky cizím vlivům, jako jsou poryvy větru či cizí gravitační pole. V zadání jsme předpokládali, že Cavendish naměřil hmotnosti a vzdálenosti dokonale přesně. Tento předpoklad je i za Cavendishovy doby velmi dobře splnitelný, neboť tyto veličiny lze opakovaným měřením dobře určit. Vidíme tedy, že Cavendish mohl vskutku před více než 200 lety uskutečnit relativně přesné měření.

Chcete-li se o chybách měření dozvědět více, přečtěte si náš text Hokus Pokus: `https://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus`.

Tomáš Patsch
`patscht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.E ... Na vlastní oči

7 bodů; průměr 3,72; řešilo 46 studentů

Jako fyzici se velmi často potřebujeme dívat skrze různé optické přístroje a na všelijaké obrazovky. Na našem mobilním telefonu nás zajímá rozlišení fotoaparátu, a když vezmeme do ruky dalekohled, využijeme jej právě k tomu, abychom rozeznali to, co by jinak nebylo možné. Jeden kvalitní optický přístroj, který máme téměř všichni, jsou naše oči. Jaké je úhlové rozlišení těch vašich?

Pokud nosíte brýle, nasaďte si je a změřte co nejpřesněji úhlové rozlišení vašeho oka. Úhlové rozlišení je nejmenší úhel mezi dvěma světelnými body takový, že je ještě rozeznáme od sebe. Například pokud bychom se dívali na noční oblohu a dvě hvězdy by byly moc blízko sebe, splynuly by nám v jednu. Při jejich postupném oddalování (rozevírání úhlu vycházejícího z našeho oka k nim) bychom je však začali rozeznávat.

Závisí vaše rozlišení na světelných podmínkách?

Teorie

Sítnici našeho oka tvoří množství světločivných buněk – tyčinek a čípků. Tyčinky jsou zodpovědné za vnímání „jak moc je světla“. Díky nim tak jsme, ač mizerně, schopni v noci rozlišit stěnu od díry a nerozplácnout se o dveře. O samotné kvalitní rozlišení se starají čípky.

Ve zdravém oku se světelný bod promítne jako maličký rozmazaný kroužek na sítnici a osvětlí příslušný čípek, který vyšle do mozku signál. Nosíme-li brýle, naše oko má lehce odlišné optické vlastnosti, které působí, že se na sítnici místo maličkého kroužku promítá větší skvrna. Ta zabere více čípků, a tak vidíme rozostřeně. Je to podobné jako s obrázky. Čím více pixelů na monitoru zabírá jeden barevný čtvereček, tím rozostřenější se nám obrázek zdá.

Dva světelné body jsme pak schopni rozlišit, pokud se mezi nimi nachází alespoň jeden neosvětlený čípek (jinými slovy, když spolu dva osvětlené čípky nesousedí). Pokud spolu čípky sousedí, k mozku se nedostane informace o tom, že je mezi nimi mezera, protože v ní žádný čípek není a nám body tedy slije v jeden. Velikost rozlišovacího úhlu oka ψ pak určíme z průměru čípků $d = 0{,}005\,\mathrm{mm}$ (ten udává vzdálenost okrajů světelných kroužků takovou, při které už mohou jeden čípek těsně nezasáhnout) a ohniskové vzdálenosti oka $f = 17\,\mathrm{mm}$ (využíváme vzorce pro obloukovou délku o a poloměr r: $\psi \cdot r = o$).

$$\psi \approx \frac{0{,}005\,\mathrm{mm}}{17\,\mathrm{mm}} \doteq 0{,}000\,3\,\mathrm{rad} \doteq 1{,}06'$$

Z biologického hlediska bychom tedy měli rozlišit body o úhlové vzdálenosti přibližně jedné minuty.[13]

Předchozí vzorec počítá s tím, že světlo se na sítnici promítne opravdu tak, jak má. Ve skutečnosti však má obraz po průchodu čočkou vady, protože žádná optická soustava (ani lidské oko) není dokonalá. Čočka světlo částečně rozptýlí, a částečně dojde k takzvané interferenci.

Interference je, ve stručnosti, jev způsobený tím, že světlo se chová jako vlna. Když na stejné místo dorazí dvě vlny, jejich výchylky se sečtou v menší či větší míře podle toho, jaké jejich výchylky byly v okamžiku setkání. Pro světlo to znamená, že podle toho, jak se setkávají na daném místě různé paprsky světla, bude na světločivných buňkách světlo nebo tma. V extrému – dorazí-li se stejnou výchylkou, bude jas maximální, při opačné výchylce bude v daném místě sítnice vždy tma. Zmíněný rozmazaný světelný kroužek z bodového zdroje světla tedy bude ještě přesněji skvrnou obklopenou světlými a tmavými pruhy jako vlnami kolem kamene hozeného do vody. Efektivně je tedy světelná skvrna ještě větší. Pak podle tzv. *Rayleighova kritéria* jsou za ještě rozlišitelné považovány dva body, pro které se interferenční maximum prvního řádu – první světelný prstenec – jednoho bodu sejde s interferenčním minimem prvního řádu – prvním černým prstencem – druhého bodu. Úhlovou vzdálenost, pro kterou toto platí, vypočteme vzorcem

$$\vartheta = 1{,}220\,\frac{\lambda}{D}\,,$$

kde λ je vlnová délka světla, pro které úhlovou vzdálenost počítáme, $D = 4\,\mathrm{mm}$ je průměr čočky a číslo 1,220 je z výpočtů pozice zmiňovaných „prstenců světla a tmy“.[14] Bílé světlo se skládá z celého spektra od 380 nm do 750 nm, jako vlnovou délku pro odhad zvolme průměr těchto vlnových délek $\lambda = 565\,\mathrm{nm}$.

$$\vartheta \approx 1{,}220\,\frac{5{,}65 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mm}}{4\,\mathrm{mm}} \doteq 0{,}000\,17\,\mathrm{rad} = 0{,}584'$$

Můžeme si povšimnout, že právě uvedený vzorec dává nižší hodnotu než dřívější odhad z geometrických rozměrů oka. Nový vzorec nepočítá se vzdáleností jednotlivých čípků, ale pouze s promítnutím bodů na libovolné stínítko, tedy udává rozlišení lepší, než by naše oko mělo mít. Dává ale zároveň teoretické horní omezení na to, jak dobré vůbec oko může být, protože s libovolně hustým pokrytím sítnice čípky máme jako vstup k dispozici stále jen rozmazané a překrývající se světelné skvrny. Pojďme teď oba výpočty srovnat s naměřenými hodnotami.

Měření

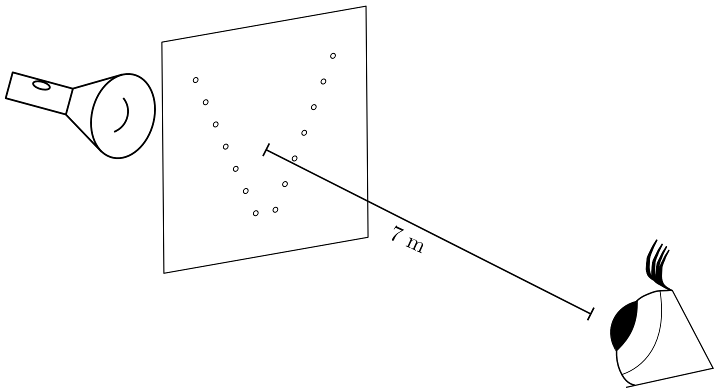
Experiment se bude lišit podle toho, kdo měření provádí. Krom toho, jestli nosíte brýle, nebo ne (v našem případě experimentátor brýle nenosí), závisí také na tom, zda jste muž, nebo žena (za nás měřila žena). Informace o počtu a typu světločivných buněk v oku se přenáší na chromozomu

[13] Zdroj rozměrů částí oka (použito i dále): `https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/svetlo/lidske-oko`

[14] Pro zájemce o podrobnější čtení zde podrobný text v angličtině: `https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_resolution`

X, proto ženy (s kombinací XX) jsou citlivější na různé světlo a vnímají více barev než muži (s kombinací XY). Při genetické mutaci chromozomu X pak dokonce může dojít k tomu, že má žena ještě o jeden druh čípků více, tedy je její oko ještě citlivější, zatímco muž je při stejné mutaci barvoslepý. Na rozdíl od mužů však většina žen nezjistí, zda tuto mutaci má, nebo nemá. Dalším silným faktorem je také stav očí z hlediska únavy. Protože měření jsme provedli po sepsání celé teorie výše hned při odchodu od počítače, byly oči již před experimentem mírně unavené, tedy hůře se jim ostřilo a rozlišovalo.

Přichystáme si kartonovou kartičku, do které do sloupce nad sebe přichystáme špendlíkem páry dírek. První dvě vzdálené jeden milimetr, další dva milimetry a postupně přidáváme vzdálenost až do sedmi milimetrů. Destičku umístíme do vzdálenosti sedmi metrů od oka (podle prvního vzorce by pak měly být ještě rozlišitelné body ve vzdálenosti dvou milimetrů). Za destičku umístíme rozsvícenou svítilnu. Pohledem jedním okem na destičku určíme, kterou dvojici bodů ještě rozlišíme a zaznamenáme jejich vzdálenost. Měnit světelné podmínky můžeme buďto rozsvěcením okolních světel různé intenzity, barvy a směru, nebo měněním barvy či intenzity světla svítilny.[15]



Obr. 7: Schéma aparatury pro měření

Měříme pouze jednu hodnotu, protože při každém pozorování (pokud nám mezitím někdo neblýskne fotoaparátem do očí, nebo nedojde k jiné nečekané změně výchozích podmínek – taková měření obvykle přeměříme znovu) vidíme všechny body stále stejně.

Určení nejistot

Nyní k výpočtu nejistoty měření. Chyba do měření vstoupí měřením vzdálenosti, nejistotu tohoto měření určíme jako polovinu nejmenšího dílku měřidla – pravítka, tedy $u_l = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Samotný úhel φ vypočteme pomocí vzorce

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{7\,\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{7\,\mathrm{m}}\right),$$

[15] Zajímavé je, že do určité intenzity světla bodů by měla rozlišovací schopnost růst, pak pro určitý interval zůstat konstantní a následně se zvyšující se intenzitou klesat kvůli oslnění.

Rozsvícení svítilny	Světlo v okolí	Vzdálenost bodů l	Úhel φ	Nejistota úhlu u_φ
Vyšší	tma	3 mm	1,47′	0,5′
Vyšší	slabé žluté světlo	4 mm	1,96′	0,5′
Vyšší	UV	4 mm	1,96′	0,5′
Nižší	tma	3 mm	1,47′	0,5′
Nižší	slabé žluté světlo	4 mm	1,96′	0,5′
Nižší	UV	5 mm	2,46′	0,5′

Tab. 2: Naměřené úhlové vzdálenosti rozlišitelných bodů

který plyne z pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách 7 m a l a s úhlem φ, který měříme. Vzhledem k tomu, že pracujeme s malými úhly, můžeme psát (a způsobíme tím menší chybu než např. zaokrouhlení kalkulačky):

$$\varphi \approx \frac{l}{7\,\mathrm{m}}\,.$$

Nejistota určení φ je tedy (předpokládáme, že délku sedmi metrů jsme určili přesně):

$$u_\varphi = \frac{u_l}{7\,\mathrm{m}}\,.$$

Více o nejistotě nepřímého měření najdete na stránkách v sekci Hokus Pokus.[16]

Spočetli jsme nejistotu hodnoty nejmenšího rozpoznaného úhlu. Naše měření však skrývá ještě jeden zdroj chyb: ověřovali jsme, jestli dokážeme rozpoznat díry vzdálené o milimetr, následně o dva, následně o tři atd. Co kdybychom ale dokázali rozpoznat menší odchylku, např. díry vzdálené o milimetr a půl? Na to bychom nepřišli. Jinými slovy: odchylka pochází z délky rozestupů světelných bodů podobně jako na metru.

Měli bychom k měření tedy přičíst další nejistotu odpovídající polovině testované změny rozestupu, tedy 0,5 mm. Pak se možná odchylka vzdálenosti dostane na hodnotu $u_l = 1\,\mathrm{mm}$, což znamená $u_\varphi \doteq 0{,}5'$

Závěr

Můžeme si povšimnout, že našemu měření se více blížil výsledek vzorce založeného na biologické stavbě našeho oka. Výsledný naměřený úhel pro „ideální podmínky“, kdy je v okolí tma, je však vyšší než úhel vypočtený. Lidské oko není dokonalé a mívá problém se přizpůsobit větším světelným kontrastům. Zároveň, s brýlemi i bez nich, nám stále zůstávají drobné zrakové vady, nikdy prostě nebudeme vidět tak dobře jako ono „teoretické oko“ z výpočtů.

Výpočet také neuvažuje různé rozptyly mezi čočkou a sítnicí způsobené plaváním odumřelých buněk v komorové vodě. Při opakovaném měření jsou zároveň oči unavenější, je tak pro ně náročné se soustředit a ostřit na něco malinké v takové vzdálenosti. Náš mozek navíc ani neví, jak daleko se body nachází (ve tmě nedokáže vzdálenost zdroje světla odhadnout). Za světla to také není snadné a z neustálého přeostřování, při kterém náš mozek jednoduše zkouší různé vzdálenosti, můžeme světelné body dokonce vidět různě měnit polohu a „tancovat“. Tehdy je nutné měření přerušit a zkusit to znovu za nějaký čas.

[16] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus`

Světlo v okolí snižovalo naši rozlišovací schopnost, protože částečně přesvětlovalo malé body v dálce, takže byly hůře vidět. Jak ukázalo měření se slaběji rozsvícenou svítilnou, nejvíce rozlišovací schopnost snížilo zapnuté UV světlo $\varphi_{\text{n-UV}} = (2{,}46 \pm 0{,}5)'$. Jak jistě víme, v UV záření spousta předmětů svítí. Takovým předmětům se těžko vyhýbá a v průběhu tohoto měření jich bylo v okolí přítomno tolik, že výrazně oslňovaly a oči se jen velmi těžko ostřily na světelné body. Při vyšší intenzitě světla u bodů zářící předměty nedělaly tak velký problém, protože body stále svítily intenzivněji, při nižší intenzitě byl tento problém větší. S vyšší intenzitou světla svítilny jsme naměřili $\varphi_{\text{v-UV}} = (1{,}96 \pm 0{,}5)'$.

Pro tmu a slabší žluté světlo v pozadí dosáhly obě intenzity stejných hodnot, v tomto případě tak neměla intenzita světla ze svítilny tak zásadní vliv. Naměřili jsme $\varphi_{\text{v-t}} = \varphi_{\text{n-t}} = (1{,}47 \pm 0{,}5)'$ a $\varphi_{\text{v}-\text{ssz}} = \varphi_{\text{n}-\text{ssz}} = (1{,}96 \pm 0{,}5)'$.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.V ... Bez driblování

7 bodů; průměr 4,24; řešilo 21 studentů

1. *Při volejbalu hodil Jirka svému kamarádovi vzdálenému* 10 m *míč na druhou půlku hřiště, ten ho obdržel za dvě pětiny sekundy. Mohl mu v chycení míče zabránit protihráč Aleš, který stál v polovině mezi oběma kamarády a je o* 30 cm *vyšší než bod, ze kterého Jirka hodil míč?*

2. *LeBron si ve volném čase házel míčem do koše tak, že vyskočil a házel tak ze stejné výšky jako koš. Protože házel z celé půlky hřiště, divil se mu jeho kamarád Kobe, že má tak přesné ruce, že se pokaždé trefí. Jestliže míč dosáhl maximální výšky* 2 m *nad košem, jakou největší rychlost do strany může míč mít, aby za dobu letu neuhnul z rovné dráhy o více než* 23 cm*, což je poloměr koše? V takovém případě by se LeBron již netrefil, ale on se přece trefí vždy.*

1. Abychom zjistili, zda Aleš může přihrávce zabránit, musíme vypočítat výšku, jakou bude mít míč v polovině letu. Přesně tam totiž míč dosáhne nejvyššího bodu své dráhy. Pro tuto výšku platí vztah
$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}\,,$$
kde v_0 je vertikální složka počáteční rychlosti a g je tíhové zrychlení. Nyní tedy ještě musíme dopočítat onu rychlost v_0. To můžeme pomocí vztahu pro výpočet času výstupu z Výfučtení
$$t_{\text{v}} = \frac{v_0}{g}\,.$$
Z něho vyjádříme rychlost v_0
$$v_0 = g t_{\text{v}}\,.$$

Tuto rychlost nyní můžeme dosadit do vztahu pro výpočet maximální výšky. Musíme si jen dát pozor na to, že čas výstupu je polovinou celkového času letu, tudíž nejvyššího bodu dosáhne míč za čas $t_\mathrm{v} = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Náš vztah pro výpočet maximální výšky je tedy

$$h_\mathrm{max} = \frac{g^2 t_\mathrm{v}^2}{2g} = \frac{1}{2} g t_\mathrm{v}^2\,,$$

přičemž tento vztah také můžeme znát z výpočtu dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu. Nyní tedy můžeme dosadit zadané číselné hodnoty:

$$h_\mathrm{max} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot (0{,}2\,\mathrm{s})^2 \doteq 0{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

Jak ale víme, Aleš je vyšší o 30 cm než místo hodu, tudíž míč může zachytit s rezervou 10 cm. Můžeme si také všimnout, že výška nejvyššího bodu vůbec nezávisí na délce hodu, pouze na době letu.

2. Vzhledem k tomu, že víme, jak velkou vzdálenost může míč urazit do strany, tak k vypočítání rychlosti potřebujeme znát jen dobu letu míče. K tomu využijeme zadanou maximální výšku h míče nad košem. V první části úlohy jsme již odvodili vztah mezi maximální výškou a dobou výstupu. Ten tedy nyní můžeme využít k dopočítání času t_v, který zabere výstup

$$h = \frac{1}{2} g t_\mathrm{v}^2\,.$$

Ze vztahu vyjádříme dobu výstupu

$$t_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2h_\mathrm{max}}{g}}\,.$$

Nás ovšem zajímá hlavně celková doba letu t. Ta odpovídá dvojnásobku doby vzestupu, tedy

$$t = 2\sqrt{\frac{2h_\mathrm{max}}{g}}\,.$$

Nyní, když už jsme vypočítali čas, nám stačí pouze dosadit do vzorce pro výpočet rychlosti rovnoměrného pohybu (neboť rychlost do strany si míč po celou dobu letu zachová, takže se jedná o rovnoměrný pohyb)

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{2\sqrt{\frac{2h_\mathrm{max}}{g}}}\,,$$

kde s je dráha, kterou míč urazí směrem do strany (v našem případě se jedná o poloměr koše). Nyní už nám stačí dosadit zadané číselné hodnoty a vypočítat výsledek:

$$v = \frac{0{,}23\,\mathrm{m}}{2\sqrt{\frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}}} \doteq 0{,}18\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

LeBron tedy může míči do strany udělit rychlost maximálně $0{,}18\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ neboli $18\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	7	7	7	44	130
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	4	3	6	6	3	7	7	**36**	**91**
2.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	2	6	–	–	–	–	**8**	**25**
3.	*Klára Vildomcova*	ZŠ Divišov	2	–	–	–	–	–	–	**2**	**15**
4.	*Helena Rýparová*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
5.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
6.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**2**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	7	7	7	44	130
1.	*Jiří Račanský*	G, Brno-Řečkovice	5	5	6	3	7	6	6	**38**	**107**
2.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	2	3	5	6	3	7	7	**33**	**99**
3.	*Martina Černá*	ZŠ Pardubice – Polabiny	4	5	6	4	–	6	–	**25**	**96**
4.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	5	6	7	–	6	–	**29**	**86**
5.	*Ema Kučerová*	G J. Jungmanna, Litoměřice	5	2	6	1	–	6	–	**20**	**71**
6.	*Vojtěch Mišičko*	G, Jateční, Ústí nad Labem	5	2	6	1	3	3	–	**20**	**67**
7.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	5	5	6	7	–	–	–	**23**	**61**
8.	*Lukáš Kárník*	ZŠ Kostelec nad Černými lesy	5	5	6	7	–	4	–	**27**	**60**
9.	*Lucie Rottová*	G Ústavní, Praha	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**57**
10.	*Ondřej Fikr*	G, Litoměřická, Praha	1	3	1	4	1	0	1	**11**	**55**
11.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	4	5	6	7	–	6	–	**28**	**53**
12.	*David Matoušek*	ZŠ Němčice nad Hanou	4	5	5	1	–	–	–	**15**	**51**
13.–14.	*Tereza Sršňová*	G, Budějovická, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**46**
13.–14.	*Eliška Urbanová*	ZŠ Divišov	4	–	6	–	–	7	–	**17**	**46**
15.	*Jakub Roštík*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	5	4	7	–	0	–	**21**	**43**
16.	*Eliška Dřínková*	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**41**
17.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	2	1	2	0	–	1	0	**6**	**39**
18.	*Štěpán Stichenwirth*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	**34**
19.	*Petr Švestka*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	–	**31**
20.–21.	*Patricie Labuťová*	ZŠ Jiráskovo n., Hradec Králové	5	5	6	4	–	–	–	**20**	**30**
20.–21.	*Tereza Martišová*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**30**
22.	*Bruno Jan Šulc*	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
23.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	5	2	6	–	4	4	6	**27**	**27**
24.	*Gabriela Volková*	Masarykovo G, Vsetín	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**25**
25.	*Matěj Dušek*	ZŠ Roztoky	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
26.–27.	*Tomáš Viktor Kubíček*	ZŠ a MŠ DOCTRINA, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
26.–27.	*Jana Novotný*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
28.–29.	*Natálie Boucová*	Masarykovo klasické G, Říčany	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
28.–29.	*Melánie Boušková*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	2	2	–	–	–	–	–	**4**	**21**
30.	*Věra Marie Krejčí*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
31.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
32.	*Kristýna Kábrtová*	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	7	7	7	44	130
33.	*Bianka Jirátková*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
34.–37.	*Ema Čekalová*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
34.–37.	*Adam Ondračka*	ZŠ Pionýrů, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
34.–37.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
34.–37.	*Anežka Štulová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
38.	*Pavel Fryjauf*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
39.	*Barbora Pauková*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
40.–41.	*Vítek Novotný*	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
40.–41.	*Jan Štefanča*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
42.	*Matěj Čentík*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
43.–44.	*Mai Chu Nhu*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
43.–44.	*Jan Mansfeld*	ZŠ Třebíz	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
45.	*Leontýna Helena Keates*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
46.–47.	*Karolína Foltýnová*	ZŠ U Hřiště, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
46.–47.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
48.–51.	*Michaela Marešová*	ZŠ Chyšky	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
48.–51.	*Lukáš Matoušek*	G, Česká Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
48.–51.	*Denisa Mazáčová*	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
48.–51.	*Vladimír Tůma*	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	7	7	39	115
1.	*Matouš Mišta*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	7	7	7	5	**37**	**103**
2.	*David Něnička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	3	6	1	7	6	7	**30**	**95**
3.	*Magdalena Hybnerová*	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	5	6	7	–	5	7	**30**	**86**
4.	*Renata Brázdová*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	6	7	–	–	4	**22**	**85**
5.	*Eva Barčová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	4	4	6	2	**27**	**80**
6.–8.	*Sebastian Ray*	ZŠ Školní, Bechyně	–	5	5	4	–	–	5	**19**	**64**
6.–8.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	–	5	6	1	5	–	–	**17**	**64**
6.–8.	*Pavla Šimová*	G, Šumperk	–	5	6	7	3	–	1	**22**	**64**
9.	*Ivan Žemlička*	G Ústavní, Praha	–	1	6	7	4	6	6	**30**	**58**
10.	*Adam Bretšnajder*	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**55**
11.–12.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**54**
11.–12.	*Václav Verner*	PORG, Praha	–	2	2	1	4	3	0	**12**	**54**
13.	*Agáta Anna Štěpánová*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	6	5	–	–	–	**11**	**43**
14.	*David Vedral*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**41**
15.	*Lucie Židková*	G Komenského, Havířov	–	2	6	4	–	2	–	**14**	**35**
16.	*Karel Kubeš*	G, Písek	–	3	6	–	–	4	–	**13**	**34**
17.–18.	*Alexander Adámek*	ZŠ Hostýnská, Praha 10	–	5	2	4	–	4	–	**15**	**32**
17.–18.	*Jakub Merta*	ZŠ Brno - Bystrc	–	2	2	–	–	–	–	**4**	**32**
19.–20.	*Jakub Drábek*	Slovanské G, Olomouc	–	2	2	1	–	–	–	**5**	**31**
19.–20.	*Jan Kroupa*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	1	2	6	–	–	–	**9**	**31**
21.	*Rebeka Heřmanová*	G Jana Keplera, Praha	–	2	6	–	–	–	–	**8**	**30**
22.	*Klára Rašková*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	**28**
23.–24.	*Radim Gabriel*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
23.–24.	*Václav Vostal*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
25.–26.	*Magdaléna Jůzová*	ZŠ Brno - Bystrc	–	1	–	–	–	1	1	**3**	**22**
25.–26.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	7	7	**39**	**115**
27.	*Vít Němec*	ZŠ a MŠ Tasovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
28.–29.	*Adam Černý*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
28.–29.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
30.–31.	*Kristýna Šeděnková*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**18**
30.–31.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
32.	*Antonie Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
33.–34.	*Františka Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
33.–34.	*Matěj Šicner*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
35.	*Tomáš Dokulil*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
36.–39.	*Lukáš Albrecht*	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
36.–39.	*Teo Bumbálek*	Mendelovo G, Opava	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**11**
36.–39.	*Oliver Kodyš*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
36.–39.	*Vojtěch Muller*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
40.–42.	*Jiří Cepník*	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
40.–42.	*Romana Kolembusová*	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
40.–42.	*Matěj Krátký*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
43.–45.	*Vojtěch Fajstl*	ZŠ a MŠ Ptení	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
43.–45.	*Lukáš Hrdý*	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
43.–45.	*Klára Řeháková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
46.	*Tomáš Bořil*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	7	7	**39**	**115**
1.	*Vojtěch Kadeřábek*	G Mensa, Praha	–	5	6	5	7	6	7	**36**	**112**
2.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	3	6	7	7	7	7	**37**	**110**
3.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	–	5	6	7	3	5	2	**28**	**92**
4.–5.	*Daniel Čtvrtečka*	G, Budějovická, Praha	–	3	6	7	5	–	4	**25**	**74**
4.–5.	*Šimon Genčur*	Biskupské G, Brno	–	3	2	0	6	2	4	**17**	**74**
6.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**53**
7.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	6	4	–	–	–	**10**	**42**
8.	*Lukáš Rella*	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
9.	*Markéta Poláčková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
10.	*Jakub Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
11.	*Ivana Ludvíková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
12.	*Jakub Mašek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	2	6	–	–	–	–	**8**	**19**
13.–15.	*Eliška Marečková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**12**
13.–15.	*Ondřej Petržík*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
13.–15.	*Ema Vecková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	6	–	**6**	**12**
16.–17.	*Zuzana Petržíková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**11**
16.–17.	*Anastasie Voronscaia*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
18.–22.	*Květa Barhoňová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**10**
18.–22.	*Zuzana Forsterová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	5	–	5	–	**10**	**10**
18.–22.	*Jan Kouba*	G, Prachatice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
18.–22.	*Kristián Matúš*	ZŠ a MŠ Veřovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
18.–22.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
23.–27.	*Ondřej Běhenský*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	5	–	–	–	–	**5**	**9**
23.–27.	*Klára Forstová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**9**
23.–27.	*Ivan Pavle*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**9**
23.–27.	*Hanka Phanová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	2	–	**2**	**9**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	7	7	7	**39**	**115**
23.–27.	*Jakub Škarda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	2	–	**2**	**9**
28.	*Matěj Žambůrek*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**
29.–31.	*Tomáš Dofek*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	4	2	–	–	0	–	**6**	**6**
29.–31.	*Šárka Nejedlová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**
29.–31.	*Ondřej Tauer*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	2	–	**2**	**6**
32.–43.	*Tomáš Benda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Barbora Černá*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Danielle Fohlová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	1	–	**1**	**5**
32.–43.	*Pavel Hikl*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Esther Eleonor Hromádková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Jana Jankovcová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Klára Lojdová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Evelína Lokvencová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Hoang Ly Nguyenová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Natálie Pekařová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
32.–43.	*Stela Provalilová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	1	–	**1**	**5**
32.–43.	*Natálie Špirková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
44.–45.	*Martin Franěk*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	2	–	**2**	**4**
44.–45.	*Eliška Zelenková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**
46.–47.	*Alice Jankovcová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	2	–	**2**	**2**
46.–47.	*Natálie Veberová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	1	–	**1**	**2**
48.–50.	*Kryštof Krčmárik*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	0	–	–	1	–	**1**	**1**
48.–50.	*Dao Ngoc Ly*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**1**
48.–50.	*Klára Routová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	1	–	**1**	**1**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.