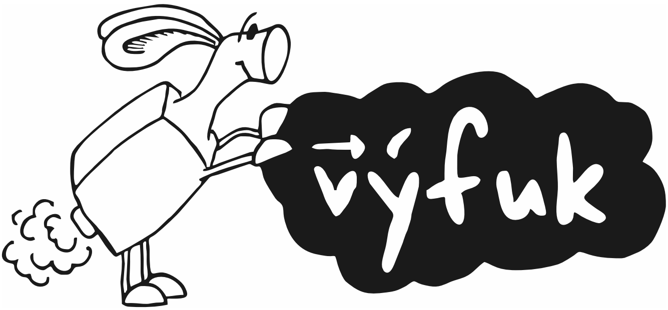


výpočty fyzikálních úkolů

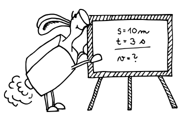
Milí kamarádi,

Vánoce už jsou za námi a nyní nás čeká pololetí a druhá polovina školního roku. Ani během zimy však ve Výfuku neleníme, a tak jsme pro vás připravili již čtvrtou brožurku, ve které naleznete kromě zadání čtvrté série, kde třeba ověříte, kolik energie nám dávají potraviny, i text Výfučtení, tentokrát na téma teplotní roztažnosti. Nabyté vědomosti máte šanci ihned ověřit v praxi při konstrukci teploměru v experimentální úloze. Na konci brožurky pak již tradičně naleznete pořadí po 2. sérii a vzorová řešení.

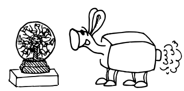
Taktéž bychom chtěli připomenout, že až do 31. 1. běží přihlašovaní na náš tábor, tak se nezapomeňte přihlásit. Pokud se s námi chcete setkat dřív, můžete kromě Jarního setkání přijít na Jeden den s informatikou a matematikou 29. 1. nebo Jeden den s fyzikou 13. 2., kde na vás na MFF UK čekají zajímavé přednášky i exkurze.

Hodně štěstí v druhém pololetí přejí

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání IV. série



Termín odeslání: 24. 2. 2020 20.00

Úloha IV.1 ... Demokratický výlet do přírody ❻ ❼ — 5 bodů

Albert, Norbert, Herbert a Dagobert se vydali na výlet do přírody. Tato soudržná skupina kamarádů má však bohužel na spoustu věcí odlišné názory, a tak vždycky, když se měli rozhodnout, kterou ze dvou cest se vydat, hlasovali.

Zatímco Norbertovi, Herbertovi a Dagobertovi tenhle způsob rozhodování připadal dobrý, Albert měl pocit, že se hodně často může stát, že se neshodnou, neboť výsledek hlasování bude 2:2. Čas však ukázal, že ve skutečnosti byl mnohem častější výsledek 3:1.

Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že se čtyři kamarádi rozhodnou v poměru 3:1, jestliže vybírají mezi dvěma volbami a každý z nich vybírá nezávisle. Pravděpodobnost konkrétního případu je v této situaci podíl onoho konkrétního případu a všech možných případů. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodnou v poměru 2:2? Co je pravděpodobnější?

Úloha IV.2 ... Traktor ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Jede traktor, je to Zetor, jede do hor, orat brambor... Klasický příběh, který všichni známe. Stihne mládenec práci, i když jeho kumpáni přijdou pozdě?

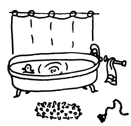
Normálně zvládnou ve dvanácti lidech práci za čistých 24 hodin a dostanou za ni všichni dohromady poctivých 12krát 2 400 Kč. Nyní ale mládenec pracuje na poli samotný, jelikož všichni jeho kumpáni poněkud zaspali. Proto zavolá jednomu z nich, který za hodinu přijde. Jakmile přijde, tak každý[1] zavolá jednomu jinému kamarádovi. Ti následně za hodinu přijdou. Proces se takto opakuje a pole má neomezenou kapacitu pracovníků. Kdy dokončí svoji práci? Kolik peněz dostane náš mládenec, když se rozdělí spravedlivě podle vykonané práce, a když se peníze rozdělí stejně mezi všemi, kteří vykonali nějakou práci?

Úloha IV.3 ... Bufet v Burdž Chalífě ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Lubor jednou dostal hlad, tak si šel dát k svačině párek v rohlíku, který po strávení uvolní $E = 263\,\mathrm{kcal}$ (kilokalorií). Je ovšem ve vysoké budově a bufet je až v přízemí. Když si tedy párek koupí, ale zároveň musí vyšlapat schody do výšky H, říká si, jestli se mu to energeticky vůbec vyplatí.

Uvažujte, že Lubor váží $m = 60\,\mathrm{kg}$, stoupá průměrně o $5\,\mathrm{m}$ za minutu a průměrně spálí $6000\,\mathrm{kJ}$ denně jenom tím, že dýchá a udržuje tělesnou teplotu. S jakou účinností (v procentech) přeměňuje energii z párku v rohlíku ve svou potenciální energii, pokud se cestou do schodů zadýchá, a má tak o $10\,\%$ vyšší spotřebu, než kdyby jenom ležel? Jak vysoká by musela budova být, aby se mu to nevyplatilo?

Úloha IV.4 ... Vítečná koupel ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Když si jednoho dne Vítek napustil vanu, nedopatřením po napuštění ztratil špunt. Jakou rychlostí začala voda odtékat z Vítkovy vany, jestliže ji měl napuštěnou do výšky $h = 30\,\mathrm{cm}$? Vítek zpanikařil, a tak začal do vany zpětně napouštět vodu s přítokem $Q = 15{,}0\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$. V jaké výšce se voda ve vaně ustálila, jestliže byl obsah Vítkova odtokového otvoru $S = 4{,}0\,\mathrm{cm}^2$?

Úloha IV.5 ... Kepler volá domů ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Přátelé Výfuku se rozhodli, že prozkoumají trpasličí planetku UCHO-373. Rozdělili se do dvou skupin, přičemž jedna přistála na povrchu a zjistila, že planetka má poloměr R a hmotnost m, druhá v průzkumném modulu zaujala stabilní kruhovou oběžnou dráhu ve vzdálenosti $3R$ od středu planetky.

- Načrtněte obrázek oběhu družice a vypočtěte její oběžnou rychlost.

[1] tedy oba dva

Výzkumnou misi však přerušil zbloudilý asteroid, který narazil do Výfučího průzkumného modulu. Zpomalil ho natolik, že začal obíhat po elipse tak, že v nejbližším bodě oběhu byl těsně u povrchu planety a v nejvzdálenějším bodě v původní vzdálenosti $3R$ (od jejího středu).

- Načrtněte obrázek tohoto oběhu a vyznačte hlavní a vedlejší poloosy a ohniska.

Bohužel se důležité přístroje v modulu nárazem asteroidu rozbily, a tak přátelé Výfuku v modulu neznají svou oběžnou dobu. Naštěstí ti, kteří zůstali na planetce, ví, že **na obzoru** byl výzkumný modul od nich vzdálen $1{,}7R$ a do **nadhlavníku** potom dorazil za $8{,}0\,\mathrm{h}$. Přátelé Výfuku na planetce se nachází v místě protilehlém bodu, kde modul prolétává nejblíž planetce.

- Jak dlouho trval družici jeden oblet? *Pro jednoduchost můžete (a nemusíte) předpokládat, že ohnisko je ve středu planety.*

K výpočtu můžete využít fakt, že dle druhého Keplerova zákona[2] je tzv. *plošná rychlost* (plocha, kterou za čas opíše spojnice modulu a planety) modulu konstantní. Také využijte fakt, že obsah elipsy je roven πab, kde a a b jsou hlavní resp. vedlejší poloosy elipsy.

Po zjištění oběžné doby se přátelé Výfuku z planetky opět setkali se zbytkem týmu v modulu a nyní se chtějí vrátit zpátky ke své mateřské lodi, která planetku taktéž obíhá. Bohužel s mateřskou lodí ztratili komunikaci, a tak jen vypozorovali, že její oběžná doba je $48\,\mathrm{h}$. Znají ale všechny Keplerovy zákony, a tak si poradí.

- Aby modulu na cestě k lodi vystačilo palivo, musí být hlavní poloosa dráhy mateřské lodi kratší než dvojnásobek hlavní poloosy modulu. Dostanou se přátelé Výfuku domů?

Úloha IV.E ... Konstrukce teploměru ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Teorie roztažnosti, o které pojednáváme ve Výfučtení této série, je široce aplikována při měření teploty. Sestavte si vlastní teploměr na bázi teplotní roztažnosti ze skleněné či plastové lahve, brčka, plastelíny a směsi lihu a vody v poměru 1:1, kterou můžete případně obarvit potravinářským barvivem, aby bylo čtení hodnot snazší. Samotný postup konstrukce nalezněte sami. Líh vám mohou rodiče zakoupit v drogerii.

Váš teploměr *okalibrujte* – to znamená: udělejte si na něm rysky pro nějakou velmi nízkou a pak pro nějakou vysokou teplotu, kterou určíte pomocí jiného přesného teploměru. Když takto zjistíte, jaký vlastně je rozsah (ve stupních Celsia) vašeho teploměru, použijte jej ke změření venkovní teploty ve vámi určené datum, hodinu a na vámi určeném místě.[3] Teploměr vyfoťte či jinak zdokumentujte ve všech třech měřeních. Jak přesný takový teploměr je? Diskutujte přesnost teploměru (sami ji můžete porovnat s jinými teploměry).

Upozornění: Při práci s lihem dodržujte zásady bezpečnosti popsané na jeho lahvi!

Bonus pro náročné za odměnu: Určete ze svého experimentu koeficient objemové roztažnosti vámi použitého roztoku.

Úloha IV.V ... Podvodník s olejem ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Obchodník s olejem nakoupil 120 barelů potravinového oleje, každý s objemem přesně 100 litrů. Napadlo jej, že když ocelové barely zahřeje, část oleje vyteče a bude jím moci naplnit další sudy. Než se však do nekalého počínání pustí, zajímá ho, kolik peněz takto neoprávněně získá.

[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Keplerovy_zákony#2._Keplerův_zákon

[3] Údaj poté hrubě porovnáme s nejbližší meteorologickou stanicí.

- Předpokládejme, že obchodník je schopen sudy s olejem ohřát o $t = 60\,°\mathrm{C}$. Dále uvažujme koeficient teplotní objemové roztažnosti oleje jako $\beta_{\mathrm{olej}} = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$ a koeficient teplotní délkové roztažnosti oceli jako $\alpha_{\mathrm{ocel}} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Jaký objem oleje tím získá?

- Jeden litr potravinového oleje si zákazník koupí za 40 Kč. Vyplatí se obchodníkovi takový podvod, pokud je měrná tepelná kapacita oleje $c = 1800\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, hustota před zahřátím $\varrho = 910\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, GJ tepla stojí 560 Kč a obchodník je schopný barely zahřívat s účinností $n = 40\,\%$? Na kolik peněz si přijde?

Poznámka: Níže najdete doprovodný text potřebný k vyřešení úlohy.

Výfučtení: Teplotní roztažnost

Určitě jste někdy přemýšleli nad tím, jak funguje třeba takový rtuťový teploměr. Jak je možné, že se při zvýšení venkovní teploty sama od sebe zvedne hladina kapaliny? A proč jsou mezi kolejemi pravidelné malé mezery? Když totiž těleso zvýší nebo sníží svou teplotu, změní se i jeho rozměry. Tento jev nazýváme teplotní roztažnost a v tomto Výfučtení si ho podrobněji vysvětlíme. Stejně tak si zmíníme i další jevy, které jsou se změnou teploty spojené.

Struktura látek

Všechny látky okolo nás mají svou elementární strukturu – skládají se z menších částí: molekul a jednotlivých atomů nebo iontů. Tyto částice ale v látce nezabírají všechen prostor, jsou mezi nimi mezery, ať už se jedná o jakékoli skupenství (kapalné, pevné či plynné). Mluvíme proto o tzv. nespojité struktuře látek.

Díky tomu se mohou částice v látkách všelijak pohybovat. Vykonávají různé druhy pohybů od posuvného až po otáčivý, ale vzhledem k tomu, jak jsou částice malé, nazýváme tento pohyb souhrnně neuspořádaný. Každá molekula se tak chová jako taková miniaturní pružinka – neustále kmitá okolo své rovnovážné polohy (tzn. polohy, ve které je v klidu). Dokážeme překvapivě snadno určit, jak rychle se molekuly v nějakém tělese pohybují, stačí totiž změřit jeho teplotu. Čím rychlejší je průměrně pohyb molekul, tím vyšší je teplota tělesa. Tu můžeme měřit více způsoby. Všichni jste se již určitě setkali s jednotkou stupňů Celsia (°C), ve kterých za pokojového tlaku vzduchu měříme, že voda tuhne při 0 °C a vaří se při 100 °C. Pokud ale budeme měřit teplotu tak, že nulu položíme tam, kdy téměř ustane pohyb částic látky, pak je jednou z možností použít jednotek *kelvinů*: přičemž $0\,\mathrm{K} \doteq -273{,}15\,°\mathrm{C}$ odpovídá *absolutní nule*, tedy stavu, kdy se molekuly pohybují tak pomalu, jak jen jim to kvantová fyzika dovoluje.[4] Kelvin je jednotkou o stejné velikosti jako stupeň Celsia, a tak např. $-1\,°\mathrm{C} = 272{,}15\,\mathrm{K}$.

Představme si, že máme velice studené těleso. Když si molekuly v něm představíme jako pružinky, zjistíme, že v zimě kmitají jen velice pomalu. Taková líná pružinka vlastně ani nepotřebuje kolem sebe tolik prostoru, rovnovážné stavy molekul jsou poměrně blízko sebe. Když ale tělesu dodáme teplo, pružinky mají vyšší energii a začnou kmitat rychleji. Při rychlejším kmitání ale samozřejmě potřebují i více prostoru, rovnovážné polohy molekul se tak od sebe vzdálí. Nyní tak velice zjednodušeně chápeme onu záhadnou teplotní roztažnost – většina látek

[4] Skutečné vymizení pohybu totiž není v reálném světě možné a ani dobře definované, ale to by bylo už na jiný text.

se při zahřátí rozpíná, protože se zvyšující se teplotou se od sebe oddalují rovnovážné polohy molekul.

Teplotní objemová roztažnost

Nyní si ukážeme, jak můžeme s teplotní roztažností počítat. V následujícím textu budeme uvažovat pouze látky, jejichž objem či délka se se zvyšující teplotou rovněž zvětšují. O látkách, u nichž je tato úměra opačná, se zmíníme později. Teplotní objemová roztažnost nám říká, jaká je změna objemu tělesa při změně teploty. Můžeme ji počítat u pevných látek i tekutin (kapalin i plynů). Označme si původní objem tělesa jako V_0 a objem tělesa po změně teploty jako V. Potom je změna objemu $\Delta V = V - V_0$. Stejným způsobem spočítáme i změnu teploty $\Delta t = t - t_0$, kde t je výsledná teplota tělesa a t_0 je teplota při objemu V_0.

Teplotní roztažnost je při malých změnách teploty lineární jev. To znamená, že objem tělesa se s teplotou zvětšuje podle přímé úměry. Můžeme tak zapsat

$$\Delta V = V_0 \cdot \Delta t \cdot \beta \,.$$

Většinou nás ale spíše zajímá výsledný objem tělesa než objemová změna. Do předchozí rovnice tedy dosadíme dříve uvedený vztah pro změnu objemu a dostaneme $V - V_0 = V_0 \cdot \Delta t \cdot \beta$. Z této rovnice si můžeme vyjádřit výsledný objem

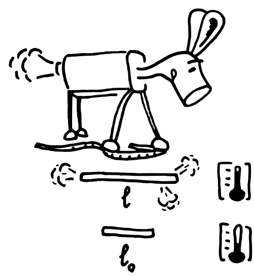
$$V = V_0 \cdot \Delta t \cdot \beta + V_0 \,,$$

což dále upravíme na

$$V = V_0(1 + \beta \Delta t) \,.$$

Záhadná značka β je v naší rovnici tzv. koeficient teplotní objemové roztažnosti. Ten má pro každou látku jinou hodnotu, kterou můžeme samozřejmě dohledat v matematicko-fyzikálních tabulkách. Tento koeficient je ale trochu ošemetný, protože to není jen jedno neměnné číslo, se kterým se setkáváme u známých fyzikálních konstant. Mění se totiž také s teplotou – většinou čím je těleso teplejší, tím je tento koeficient větší. Čím větší teplotu tak těleso má, tím rychleji se i roztahuje. Tento „chyták“ ale při našich výpočtech s malými změnami teplot zanedbáme.

Teplotní délková roztažnost



Stejně jako změnou objemu se můžeme (především u pevných těles) zabývat i změnou délky. Při zvýšení teploty těleso zvětší svůj objem, což znamená, že se vlastně roztáhne do prostoru, a zvětší se tak délky jeho stran. Musíme si dávat pozor na to, že existují tzv. izotropní tělesa, například měděné krychle, která se roztahují do všech stran stejnoměrně. Třeba některé typy krystalů patří ale mezi tzv. tělesa anizotropní, což znamená, že jejich délková roztažnost je v různých směrech různá. Musíme si tak při výpočtech dávat pozor, se kterou skupinou těles pracujeme, a popřípadě přesněji uvést, o které části a ose mluvíme.

Pokud si původní délku tělesa označíme jako l_0 a délku po změně teploty l, platí podobně jako v předchozím případě

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta t) \,,$$

α se nazývá teplotní součinitel teplotní délkové roztažnosti a opět, stejně jako objemový součinitel β, ho pro každou látku můžeme najít v tabulkách. Pro izotropní materiály navíc platí

$$\beta = 3\alpha \,.$$

Pro úplnost se také zmiňme o jednotkách, ve kterých α a β měříme – když v uvedených vztazích sčítáme součin $\alpha\Delta t$ s jedničkou, musí mít tento součin stejný rozměr jako jednička, tj. žádný. Jelikož teplotní rozdíl je v jednotkách K, tak α i β musí mít jednotky K^{-1}, aby součin $\alpha\Delta t$ byl bezrozměrný.

Musíme si tedy dávat pozor na to, abychom teplotu dosazovali ve stejných jednotkách jako koeficienty α a β, aby se nám jednotky zkrátily. Nemůžeme proto například dosadit teplotu v mK a koeficient v K^{-1}, neboť bychom dostali tisíckrát větší číslo.

Změna hustoty a anomálie vody

Jedním ze základních principů fyziky je zákon zachování hmotnosti. Díky němu můžeme s jistotou říct, že pokud nějaké těleso zahřejeme, nezměníme tak jeho hmotnost (pokud samozřejmě nedochází k odpařování). Když se ale změní objem tělesa a jeho hmotnost nikoli, musí se změnit i jeho hustota. Tu spočítáme jako poměr hmotnosti a objemu tělesa, tedy

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

a my už víme, že tento vztah můžeme zapsat jako

$$\varrho = \frac{m}{V_0(1 + \beta\Delta t)} \,.$$

Z toho vidíme, že podíl m/V_0 je původní hustota tělesa ϱ_0. Vztah mezi původní hustotou a hustotou tělesa po změně teploty[5] tak je

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta\Delta t} \,.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že při zvyšování teploty se hustota náležitě zmenšuje. Takto to alespoň funguje u většiny látek, výjimkou je voda. Možná jste už někdy slyšeli o tzv. anomálii vody, tedy že v intervalu od 0 °C do 3,98 °C se její objem při zvyšování teploty *zmenšuje*. Voda má totiž v tomto intervalu tzv. anomálii teplotní objemové roztažnosti, tedy koeficient β je v daném intervalu teplot záporný.

Existují i další sloučeniny, které mají anomální objemovou roztažnost, a to i v celém spektru teplot. Těmto látkám se při zahřívání objem zmenšuje, mají tak speciální využití v technice.

Další zajímavé jevy související se změnou teploty

Když počítáme nějaký složitější příklad, často se v závěru zadání objevuje věta *„proces se odehrává při* 20 °C*“*. I mnoho jiných fyzikálních veličin je totiž změnou teploty ovlivněno. Jako příklad si můžeme uvést třeba tlak plynu nebo intenzitu vyzařování.

Stejně tak si můžeme vysvětlit, proč se při změně teploty mění elektrický odpor. Elektrický proud je způsoben pohybem elektronů, které si můžeme velmi zjednodušeně představit jako

[5] Zde je důležité uvést, že pokud bychom využili vysokoškolskou matematiku, mohli bychom následující vztah zapsat jako $\varrho \approx \varrho_0(1 - \beta\Delta t)$. Tento zápis je na vyšších úrovních fyziky výrazně používanější.

nějaké kuličky, které utíkají jedním směrem skrz náš drát. Okolo nich jsou další částice, které se neuspořádaně pohybují, jak jsme si již vysvětlili v úvodu. Když zvýšíme teplotu, začnou se tyto částice pohybovat rychleji. Srážky mezi našimi částicemi a kuličkami utíkajícími jedním směrem jsou mnohem častější. Pohyb elektronů se tak kvůli vyšší rychlosti částic znesnadňuje a odpor vodiče je vyšší.

Pro výpočet odporu v závislosti na teplotě máme již nápadně známý vzoreček

$$R = R_0(1 + \delta \Delta t)\,,$$

kde R je výsledný odpor, R_0 odpor před zahřátím a δ teplotní součinitel odporu.

Teplotní roztažnost v našem životě

Díky teplotní roztažnosti fungují některé věci okolo nás. Jako příklad si můžeme uvést rtuťový teploměr. Rtuť má vysoký koeficient teplotní objemové roztažnosti, tudíž i při malé změně teploty můžeme v úzkém sloupci teploměru pozorovat změnu.

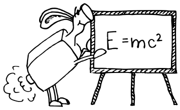
Stejně tak nám ale teplotní roztažnost občas znesnadňuje život. U některých staveb v našem okolí by i malá změna objemu mohla být fatální. Tento jev tak musí brát v úvahu architekti, proto se u kolejnic můžeme setkat s mezerami mezi jednotlivými díly (můžete si sami pro zajímavost spočítat, jak velké tyto mezery musí u železných kolejí být). Stejně tak jste si u mostu mohli všimnout podivného předělu, který zajišťuje, že se most při změně teploty nezhroutí.

Obr. 1: Detail na práh, který můžete v různých konstrukčních provedeních nalézt na koncích všech větších mostů. Dovoluje, aby se v závislosti na teplotě mohl most roztahovat a stahovat, aniž by se poškodil.
Autor: CrazyD na Wikimedia Commons, licence: GFDL (`http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html`)

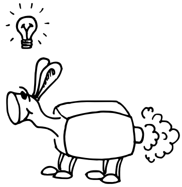
Anomálie vody je důležitá pro život na Zemi. Když totiž například rybník zamrzne, voda pod ledem má stále přibližně 4 °C, takže zde mohou i přes zimní měsíce přežívat vodní organismy.

Závěr

V tomto textu jsme si osvětlili, jak vzniká teplotní roztažnost. Naučili jsme se, jak provádět základní výpočty a že tyto výsledky můžeme aplikovat i na reálné věci okolo nás, které mají pro naši civilizaci velký význam.

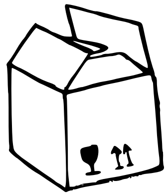


Řešení II. série



Úloha II.1 ... Uklízení

5 bodů; průměr 4,63; řešilo 27 studentů



Jindra si řekl, že konečně nastal čas na jarní úklid. Do kartonové krabice se vleze 5 kg *nestlačeného papíru. Tento papír Jindra sešlápnul na polovinu objemu a opět krabici doplnil, výsledný objem potom zase stlačil (nestlačený papír se stlačuje na polovinu, stlačený se již dále nestlačuje). Takto postup opakoval, dokud to bylo možné. Kolik* kg *papíru se v krabici nacházelo po třech opakováních? A kolik když byl Jindra s uklízením hotový (tj. když postup zopakoval hrozně mockrát)?*

Když Jindra vloží do krabice o objemu V_k nestlačený papír, vleze se do krabice přesně $m = 5\,\mathrm{kg}$, můžeme tedy říci, že hustota nestlačeného papíru je $\varrho_\mathrm{n} = m/V_\mathrm{k}$. Po stlačení zůstane hmotnost papíru stejná, ale objem bude poloviční, tudíž výsledná hustota musí být dvakrát větší, tj. $\varrho_\mathrm{s} = 2\varrho_\mathrm{n}$. Při první várce (1. přidání) mohl do zbylého objemu $V_1 = V_\mathrm{k}/2$, tedy půlky krabice, vložit nestlačený papír o hmotnosti

$$m_1 = \varrho_\mathrm{n} V_1 = \frac{m}{V_\mathrm{k}} \frac{V_\mathrm{k}}{2} = \frac{m}{2} = 2{,}5\,\mathrm{kg}\,.$$

Jakmile tento papír zase stlačí, objem úvodního papíru zůstane stejný, ale nová várka získá poloviční objem. Hustota stlačeného papíru ϱ_s bude pořád stejná. Zbylý objem v krabici bude poloviční, tedy $V_2 = V_1/2 = V_\mathrm{k}/4$. Při druhém opakování bude postup stejný, vložená hmotnost starého papíru bude

$$m_2 = \varrho_\mathrm{n} V_2 = \frac{m}{V_\mathrm{k}} \frac{V_\mathrm{k}}{4} = \frac{m}{4} = 1{,}25\,\mathrm{kg}\,.$$

Při pohledu na jednotlivé hmotnosti můžeme vidět jedno pravidlo – jsou vždy poloviční než předchozí, takže můžeme rovnou určit 3. hmotnost $m_3 = m_2/2 = m/8 = 0{,}623\,\mathrm{kg}$. Sečteme-li hmotnosti po třech opakováních (původní hmotnost + 3 přidané), bude hmotnost papíru v krabici

$$m_\mathrm{c} = m + m_1 + m_2 + m_3 = \left(5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8}\right)\mathrm{kg} = 9{,}375\,\mathrm{kg}.$$

Kolik papíru by se do krabice vešlo, pokud bychom opakovali tento postup hrozně mockrát? K tomu můžeme dojít několika různými způsoby. Například víme, že hustota stlačeného papíru se po stlačení už nemění, a tudíž by měla mít tato krabice na konci úklidu přesně tuto hustotu. Finální hmotnost starého papíru by tedy byla $m_\mathrm{f} = \varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{k} = 2(m/V_\mathrm{k})V_\mathrm{k} = 2m = 10\,\mathrm{kg}$.

Druhý způsob řešení tohoto problému je napsat si hmotnost papíru jako nekonečnou sumu. Pro hmotnost tak dostaneme výraz:

$$m_\mathrm{f} = 5\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)\mathrm{kg}\,.$$

Tento součet nekonečného počtu stále menších členů matematici nazývají *nekonečná řada*. Právě s touto řadou se potýkal například starověký filosof Zenón ve svém paradoxu půlení.[6] Lze dokázat, že tato nekonečná řada má konečný součet, na který jsme přišli již úvahou výše.

Nakonec jsme tedy zjistili, že po třech opakováních bude hmotnost papíru uvnitř krabice $m_\mathrm{c} = 9{,}375\,\mathrm{kg}$ a maximální dosažitelná hmotnost je $m_\mathrm{f} = 10\,\mathrm{kg}$. Tato úloha ukazuje, že chytrou úvahou můžeme snadno spočítat celkové množství, aniž bychom se zajímali o dílčí hodnoty součtů a snažili se přijít na to, k čemu se postupně blíží.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.2 ... Řízky na výlet

5 bodů; průměr 4,29; řešilo 58 studentů

Eva s Katkou smažily řízky na výlet. Dopoledne jich Eva spálila o 30 % více než Katka. Odpoledne Eva spálila 2, Katka nespálila žádný. Na výletě potom spočítaly, že jich Eva za celou dobu spálila o 50 % více než Katka. Kolik řízků spálily při smažení obě dohromady?

Označme si počet řízků, které Eva spálila dopoledne, jako E_d a počet řízků, které dopoledne spálila Katka, jako K_d. Vztah vyjadřující, že Eva jich spálila o 30 % více než Katka, zapíšeme jako:

$$E_\mathrm{d} = 1{,}3 \cdot K_\mathrm{d}\,,$$

neboť Eva spálila stejný počet jako Katka a ještě 30 % navíc, celkem tedy 1,3násobek.

Počet řízků, které Eva spálila odpoledne, si označíme $E_\mathrm{o} = 2$. Katka odpoledne žádný řízek nespálila, tedy $K_\mathrm{o} = 0$. Vztah, který říká, že Eva spálila celkově o 50 % více řízků než Katka, je:

$$E_\mathrm{d} + E_\mathrm{o} = 1{,}5 \cdot (K_\mathrm{d} + K_\mathrm{o})\,.$$

Dosadíme číselné hodnoty ($E_\mathrm{d} = 1{,}3 \cdot K_\mathrm{d}$, $E_\mathrm{o} = 2$ a $K_\mathrm{o} = 0$):

$$1{,}3 \cdot K_\mathrm{d} + 2 = 1{,}5 \cdot K_\mathrm{d}\,.$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme tak, že od obou stran rovnice odečteme $1{,}3 \cdot K_\mathrm{d}$ a následně vynásobíme pěti:

$$0{,}2 \cdot K_\mathrm{d} = 2 \quad \Rightarrow \quad K_\mathrm{d} = 10\,.$$

Katka spálila dopoledne celkem 10 řízků a Eva o 30 % více, takže 13. Celkově tak spálily $ř$:

$$ř = E_\mathrm{d} + K_\mathrm{d} + E_\mathrm{o} + K_\mathrm{o} = 13 + 10 + 2 + 0 = 25\,.$$

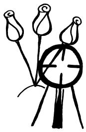
Eva s Katkou spálily dohromady 25 řízků.

Robert Gemrot

[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/Zenónovy_paradoxy

Úloha II.3 ... Samopal

6 bodů; průměr 4,73; řešilo 44 studentů



Pokud jste na pouti stříleli růže, jistě jste si všimli, že po výstřelu vám do ramene zatlačí puška silou takzvaného „zpětného rázu“. Jak velká je v průměru tato síla, která působí na rameno vojáka střílícího samopalem 800 ran za minutu? Střely vylétají rychlostí $v = 700\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a hmotnost jedné je $m = 3\,\mathrm{g}$.

Asi všichni tušíme, že když střílíme puškou, při vystřelení náboje se nám puška zatlačí do ramene. To je způsobeno zákonem akce a reakce – při vystřelení na naše rameno působí tzv. síla zpětného rázu. V našem případě se ale nejdříve nebudeme zabývat přímo silami, nýbrž veličinou, kterou nazýváme impuls síly.

Impuls síly nám říká, jaký účinek bude mít síla v nějakém časovém úseku. Čím déle na naše rameno síla zpětného rázu působí, tím větší je její účinek. Je to v podstatě obdoba veličiny jménem hybnost, kterou pravděpodobně znáte. Impuls síly vypočítáme jako $I = F \cdot \Delta t$.

V naší soustavě musí platit zákon zachování hybnosti, který nám říká, že se nám hybnost prostě nemůže nikde ztratit, jelikož zde nepůsobí žádné vnější síly, které by tuto ztrátu mohly zapříčinit. Hybnost jedné kulky je $p_\mathrm{k} = m{\cdot}v$ a podle zákona zachování hybnosti na nás tak puška musí působit impulsem síly o stejné velikosti. V našem případě jej vypočítáme jako $I = F \cdot t$, kde F je naše hledaná síla a t je čas, za který je vystřelena jedna kulka.

Ze zadání víme, že $t = 60/800\,\mathrm{s} = 0{,}075\,\mathrm{s}$, neboť za celkovou dobu 60 s bylo vystřeleno celkem 800 kulek a je vhodné počítat v základních jednotkách, tedy v sekundách. Pro výslednou sílu tak dostáváme:

$$F = \frac{m \cdot v}{t} = \frac{0{,}003\,\mathrm{kg} \cdot 700\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{0{,}075\,\mathrm{s}} = 28\,\mathrm{N}\,.$$

Síla zpětného rázu má tedy velikost $F = 28\,\mathrm{N}$.

Víme, že sílu lze také definovat jako změnu hybnosti za změnu času (což plyne též z definice impulsu), tj. v našem případě s trošku odlišným značením:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}\,,$$

což je vzoreček, který nám dá stejný výsledek, protože jej můžeme chápat tak, že za čas Δt jedna střela v pušce navýší svou rychlost z nuly o Δv. Dosadili bychom tedy ta samá čísla.

I přesto, že jsme si v této úloze pohrávali s fyzikou vyššího stupně, mohli jste na tento výsledek přijít také tím, že uvedený výpočet je prakticky jediným způsobem, jak lze ze zadaných veličin dostat cosi, co má potřebný fyzikální rozměr jednotek síly (newtonů). Takovýmto úvahám se říká též rozměrová analýza.

Karolína Letochová

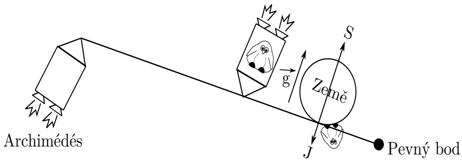
Úloha II.4 ... Jednoduché stroje

6 bodů; průměr 3,57; řešilo 35 studentů

Archimédés jednou řekl: „Dejte mi pevný bod ve vesmíru a já pohnu Zemí.“ Vyplňme mu jeho přání. Mějme pevný bod čtyři poloměry Země daleko od Země a dlouhou pevnou tyč, která je v onom bodě zapřená. Země na tyči leží svým jižním pólem. Archimédés chce udělit Zemi takové zrychlení, aby tučňáci při jižním pólu zažívali stav beztíže: chtěl jako první zkoumat nelétavé ptáky ve stavu beztíže, aby vyvracel a potvrzoval hypotézy z Aristotelovy knihy „Perizoón kinesis,“ tedy o pohybech zvířat.

Tučňákům se ovšem tato myšlenka nezamlouvá, a tak umístili do vzdálenosti 100 *světelných let raketový motor o tahové síle* 100 MN. *Archimédés má k dispozici milion raketových motorů o tahové síle* 10 MN. *Do jaké vzdálenosti má své motory umístit, aby se jeho přírodovědecký plán vydařil? Pevná tyč je polopřímka, která vychází z pevného bodu, pokračuje pod planetou Zemí a dále jsou na ni ve dvou bodech umístěné raketové motory (jedná se tedy o jednozvratnou páku).*

Vleze se dlouhá tyč do naší galaxie?



Obr. 2: Ilustrace k zadání 4. úlohy.

Nejdříve si spočítáme, jakou silou musíme na Zemi působit, aby se tučňáci nacházeli ve stavu beztíže. Aby toto nastalo, musí Země zvyšovat svou rychlost, a to se zrychlením $a = g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. K výpočtu nám tedy stačí hmotnost Země m_Z a zrychlení dosadit do druhého Newtonova zákona:

$$F_1 = m_\mathrm{Z} a$$
$$F_1 = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 5{,}9 \cdot 10^{25}\,\mathrm{N}\,.$$

Teď již máme vypočítanou sílu, kterou musíme působit na Zemi, aby bylo její zrychlení dostatečné k vytvoření stavu beztíže pro tučňáky. Nyní se tedy pustíme do výpočtu vzdálenosti, do které má Archimédes své raketové motory umístit. K tomu použijeme výpočet pomocí momentů síly. U tohoto výpočtu si musíme mimo jiné dát pozor na jednotky – světelný rok je $1\,\mathrm{ly} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$, poloměr Země označíme $R_\mathrm{Z} = 6{,}378 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$.

Chceme, aby moment síly M_1 nutný k rozpohybování Země byl stejný jako výsledný moment síly archimédových (M_2) a tučňáčích (M_3) motorů. Vzhledem k tomu, že motor tučňáků působí silou opačným směrem než motory Archimédovy, tak i momenty sil budou mít opačný směr. Výsledný moment tedy vypočítáme jako rozdíl momentů raketových motorů tučňáků a Archiméda:

$$M_1 = M_2 - M_3$$
$$F_1 d_1 = F_2 d_2 - F_3 d_3\,,$$

kde d_1 je vzdálenost Země od pevného bodu, d_2 je vzdálenost Archimédových motorů od pevného bodu, F_2 jejich celková síla, d_3 je vzdálenost raketového motoru tučňáků od pevného bodu a F_3 jeho síla.

U vzdáleností d_2 a d_3 můžeme zanedbat vzdálenost pevného bodu od Země (ony 4 poloměry Země), protože je řádově mnohem menší než vzdálenost od Země k motorům. Z rovnice chceme vyjádřit vzdálenost od pevného bodu k Archimédovým motorům d_2:

$$d_2 = \frac{F_1 d_1 + F_3 d_3}{F_2}\,.$$

Víme přitom ze zadání, že vzdálenost $d_1 = 4R_Z$, F_2 je celková síla všech motorů, které má Archimédés k dispozici (tj. počet motorů krát síla jednoho motoru, tedy $F_2 = 10^6 \cdot 10^7\,\mathrm{N}$) a F_3 je síla tučňáčího motoru (tj. $F_3 = 10^8\,\mathrm{N}$).

Nyní můžeme dosadit a dostaneme výsledek:

$$d_2 = \frac{5{,}9 \cdot 10^{25}\,\mathrm{N} \cdot 4 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 10^8\,\mathrm{N} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m}}{10^6 \cdot 10^7\,\mathrm{N}} \doteq 1{,}5 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}\,.$$

To odpovídá přibližně 16 000 světelným rokům. Vzhledem k tomu, že průměr disku naší galaxie je více než 92 000 světelných let, tak se takto dlouhá tyč do naší galaxie vleze.

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.5 ... Jak funguje jojo

7 bodů; průměr 3,00; řešilo 23 studentů

Jindra viděl zajímavé triky s jojem a hned začal přemýšlet, jak vlastně fungují z fyzikálního hlediska. Mějme tedy jojo, neboli těleso ve tvaru dvou válců o poloměru $R = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, jejichž středy spojuje osa se zanedbatelnou hmotností. Každý z disků váží $m = 50\,\mathrm{g}$ a provázek má délku $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$.[7]

1. *Jojo se jistě dá do otáčení. K charakterizaci otáčivého pohybu je užitečné znát tzv. kinetickou energii rotace joja E_k. Kinetickou energii rotujícího válce lze vyjádřit jako $E_\mathrm{k} = MR^2\omega^2/4$, kde M je jeho hmotnost a ω úhlová rychlost. Vyjádřete tuto energii pro jojo tak, aby nezávisela na rychlosti úhlové, nýbrž obvodové.*
2. *Když jojo pustíme směrem dolů, začne se provázek z osy odmotávat. Jakou úhlovou rychlost bude mít jojo těsně předtím, než dorazí na konec provázku? Poloměr osy, která spojuje středy válců a na které je namotán provázek, je $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$.*
3. *Když jojo narazí na konec provázku, jeho posuvný pohyb se zastaví a zůstane mu pouze úhlová rychlost. Poté se hned začne postupně zase namotávat směrem nahoru, než se ve výšce h úplně zastaví. Jak velká bude tato výška?*
4. *Jakou počáteční rychlostí v_0 bychom museli jojo hodit, aby se vrátilo do původní výšky (do ruky)? Myslíme tím takové hození, u kterého se bude jojo stále odmotávat z provázku bez podkluzování, jen s počáteční rychlostí v_0.*

1. Jelikož chceme, aby energie nezávisela na úhlové rychlosti, nýbrž na obvodové, musíme najít vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí, který pak dosadíme za úhlovou rychlost. Tento vztah můžeme nalézt například v tabulkách nebo na něj přijdeme pomocí rozměrové analýzy:
$$\omega = \frac{v}{R}\,,$$
kde ω je úhlová rychlost, v obvodová rychlost a R vzdálenost od osy otáčení. Tento vztah tedy můžeme nyní dosadit do zadaného vzorce pro výpočet energie:
$$E_\mathrm{r} = MR^2\frac{\omega^2}{4} = MR^2\frac{v^2}{4R^2} = \frac{1}{4}Mv^2\,.$$

[7] Hmotnost provázku zanedbáme.

Protože je však jojo složeno ze dvou válců o hmotnosti m a hmotnost jejich spojovací osy je zanedbatelná, vztah můžeme dokončit:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{4}(2m)v^2 = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

2. Nejdůležitější je si uvědomit, že při pádu joja platí zákon zachování mechanické energie (nedochází ke tření nebo jiným ztrátám). Celkový součet energie v průběhu děje tak musí být konstantní. Porovnejme tedy energii na začátku děje, kdy jojo vypustíme z ruky, a v bodě, kdy je jojo plně odmotané. Potenciální energie, kterou má jojo před odmotáváním, se proto musí rovnat součtu posuvné a rotační energie ve chvíli, kdy dorazí na konec provázku. Toto zjištění můžeme vyjádřit následovně:

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{r}\,,$$

kde E_p je potenciální energie, E_k je kinetická (translační) energie a E_r je rotační energie joja. Potenciální energii E_p můžeme vyjádřit z její definice:

$$E_\mathrm{p} = 2mgl\,,$$

kde l odpovídá délce provázku a dvojka opět pochází ze stavby joja.

Výraz $2m$ pouze značí hmotnost celého tělesa. Za posuvnou energii joja můžeme dosadit taktéž definiční vztah:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(2m)v^2 = mv^2\,.$$

Je zřejmé, že jojo bude vždy na konci odmotané části provázku. Posuvná rychlost joja pak musí odpovídat rychlosti, kterou se odmotává provázek. Tuto rychlost můžeme vyjádřit pomocí úhlové rychlosti joja a poloměru otáčení (menšího poloměru joja, tj. poloměru středové osy):

$$v = \omega r\,.$$

Proto můžeme tímto vztahem nahradit rychlost při výpočtu posuvné energie:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(2m)\omega^2 r^2\,,$$

kde r je poloměr osy, která spojuje středy válců. Za rotační energii dosadíme vztah ze zadání:

$$E_\mathrm{r} = 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$

Nyní dosadíme vyjádřené energie do původní rovnice zachování energie.

$$2mgl = \frac{1}{2}(2m)\omega^2 r^2 + 2mR^2\frac{\omega^2}{4}$$

V této rovnici můžeme vykrátit hmotnost (resp. její dvojnásobek), vyjádřit z ní úhlovou rychlost a dosadit číselné hodnoty:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gl}{r^2 + R^2/2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 1\,\mathrm{m}}{(5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 + (2{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2/2}} \doteq 240\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Jojo se tedy otočí více než 38krát za sekundu.

3. Vzhledem k tomu, že joju zbude jen úhlová rychlost, znamená to také, že mu zůstane pouze rotační energie. Tato energie se poté přeměňuje na potenciální energii tím, jak se jojo namotává zpět na provázek. Když porovnáme energii joja dole a v nejvyšší výšce h, obdržíme tento vztah:
$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{r}\,.$$
Za energie dosadíme stejné vzorce jako ve druhé části úlohy:
$$2mgh = 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$
Z této rovnice vyjádříme výšku h a dosadíme:
$$h = \frac{R^2\omega^2}{4g} = \frac{(2{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2\cdot(240\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})^2}{4\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 0{,}92\,\mathrm{m}\,.$$

4. Aby se nám jojo vrátilo zpět do původní výšky, je zapotřebí, aby mělo po zastavení na konci provázku dostatečnou energii. Nejdříve tedy vypočítejme, jakou úhlovou rychlost musí mít jojo na konci provázku, aby se namotalo zpět. K tomu zase využijeme zákon zachování energie. Jojo má přesně takovou kinetickou energii rotace, jako má potenciální energii na vršku provázku:
$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{r}$$
$$2mgl = 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$
Nyní vyjádříme úhlovou rychlost:
$$\omega = \sqrt{\frac{4gl}{R^2}}\,.$$
Nyní můžeme sestavit rovnici porovnávající energii na počátku hození a v momentě, kdy je jojo dole, na konci provázku. Ta bude podobná rovnici ze druhé části úlohy, jen na levou stranu musíme přičíst počáteční rotační a posuvnou energii, kterou joju dodáme tím, že ho hodíme rychlostí v_0:
$$E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k0} + E_\mathrm{r0} = E_\mathrm{r} + E_\mathrm{k}$$
$$2mgl + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + 2mR^2\frac{v_0^2}{4r^2} = \frac{1}{2}(2m)\omega^2 r^2 + 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$
Nyní už nám stačí dosadit za úhlovou rychlost vztah, který jsme vypočítali na počátku této části úlohy, a vyjádřit rychlost v_0:
$$2mgl + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + 2mR^2\frac{v_0^2}{4r^2} = \frac{1}{2}(2m)\frac{4gl}{R^2}r^2 + 2mR^2\frac{4gl}{4R^2}\,.$$
Odtud vyjádříme v_0:
$$v_0 = \sqrt{\frac{8glr^2}{R^2(2 + R^2/r^2)}}\,.$$

Nyní už nám zbývá jen dosadit:

$$v_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot (5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{(2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 \cdot (2 + (2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2/(5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2)}} \doteq 0{,}34\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

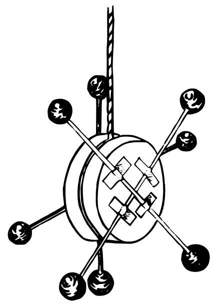
aby se nám tedy jojo vrátilo do ruky, musíme ho hodit rychlostí asi $v_0 \doteq 0{,}34\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.E ... Bojo(vé) jojo

7 bodů; průměr 4,96; řešilo 45 studentů

Čím je kolo těžší a větší, tím více nás stojí jej roztočit. Tomuto přírodnímu zákonu se nevyhne ani tak malé kolečko, jakým je jojo. Někteří z vás mohli v minulé úloze zkoumat existenci vztahu mezi tím, jak je jojo těžké a jak rychle se odvíjí na svém provázku – prověřme to nyní experimentálně! Seznamte se s délkou provázku na svém joju a změřte, jak dlouho trvá, než se vlastní vahou samo rozvine. Poté své jojo vylepšete a symetricky na něj, například pomocí špejlí, připevněte proměřené závaží[8] (např. z plastelíny), které se bude točit spolu s ním. Vyzkoušejte, jak ovlivní čas to, že jste přidali zátěž na střed joja (oproti joju bez závaží), ale také to, jak ovlivní čas odmotávání posouvání závaží dále od středu joja (v ideálním případě to můžete znázornit graficky). Nakonec popište, jaká časová změna by pro vás byla intuitivní a proč, a zda ji experiment potvrdil.



Teorie

V této části se pokusíme odvodit teoretický model. Díky němu dokážeme predikovat, jak by měl být měřený čas ovlivněn úpravou polohy závaží v závislosti na jeho poloze od středu. Jde o pokročilejší úlohu z mechaniky, jejíž řešení po vás nikdo ve vašich řešeních nevyžaduje. Využívá se při ní totiž výrazně konceptu tzv. momentu setrvačnosti, se kterým jste se na základní škole nemuseli setkat. Proto pokud se o tuto úlohu nezajímáte do hloubky z hlediska teoretického vysvětlení, můžete tuto část přeskočit a pak v té druhé a třetí vidět, jak mají správně naměřené výsledky vypadat.

Moment setrvačnosti je veličinou popisující zjednodušeně řečeno „jak špatně se těleso roztáčí“, tedy čím je moment větší, tím větší silou nebo delší dobu musíme na těleso působit, abychom jej roztočili. Samotnému joju se moment setrvačnosti $J_\mathrm{j} = m_\mathrm{j} {r_\mathrm{j}}^2/2$ nemění. Jeho hmotnost m_j je stále stejná – konstantní, stejně jako jeho poloměr r_j.

My ale na jojo přidáme prstenec plastelíny, tedy zvětšíme moment setrvačnosti soustavy joja s plastelínou o $J_\mathrm{p} = m_\mathrm{p} \cdot {r_\mathrm{p}}^2$. Hmotnost plastelíny m_p zachováme pro všechna měření konstantní. Zajímá nás, co se bude dít se změnou poloměru prstence r_p. Čím bude prstenec dál od středu joja, tím větší bude (podle vzorečků výše) hodnota momentu setrvačnosti a tím hůře se jojo bude roztáčet. Vyšší silou jej roztáčet nemůžeme – působí na něj tíhová síla způsobená gravitací Země, a tu doma jen těžko ovlivníme.

[8] Pochopitelně je také pro porovnání vhodné změřit i hmotnost samotného joja bez provázku.

Aby se tedy jojo s větším poloměrem plastelínového prstence roztočilo na stejnou úhlovou rychlost jako jojo s prstencem menším, muselo by se roztáčet delší dobu. Z toho plyne, že čím menší má jojo plastelínový prstenec, tím rychleji se bude odvíjet z provázku a dorazí tak na konec dřív.

Nyní trocha matematiky pro zvídavé – vypočteme si explicitní vzorec pro čas, za který se jojo odmotá. V ruce má jojo potenciální energii $E = mgl$, kde m je hmotnost joja i s plastelínou a l je délka provázku, tedy výška nad bodem, kde se jojo zastaví. Ze zákona zachování energie plyne, že celková kinetická energie joja, které se dorozvine na konec provázku, se rovná potenciální energii joja v ruce. Jojo má dva druhy kinetické energie – otáčivou $E_\mathrm{o} = J\omega^2/2$ a posuvnou $E_\mathrm{p} = mv^2/2$ (neboli rotační a translační). Ze zákona zachování energie tedy dostaneme rovnici:

$$mgl = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Potřebujeme vyjádřit posuvnou rychlost joja v, ale než upravíme rovnici, dosadíme za normální rychlost úhlovou $\omega = v/r_\mathrm{t}$, kde r_t je poloměr osy (tyčky), na které je navinutý provázek. Za jednu otočku osy se jojo odvine o její obvod, tedy rychlost, jakou se posouvá, je stejná jako obvodová rychlost osy. Nyní můžeme vytknout v^2, vyjádřit jej z rovnice a odmocnit ji. Dostaneme tak:

$$v = \sqrt{\frac{2mgl}{\dfrac{J}{r_\mathrm{t}^2} + m}}\,.$$

Dále víme, že dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu vypočteme jako $l = vt/2$. Polovina koncové rychlosti v je totiž průměrná rychlost joja. Z toho vyjádříme čas $t = 2l/v$. Dosadíme za rychlost předchozí vzorec a za moment setrvačnosti $J = J_\mathrm{j} + J_\mathrm{p}$ a dostáváme:

$$t = \frac{2l}{\sqrt{\dfrac{2mgl}{\dfrac{\frac{1}{2}m_\mathrm{j}{r_\mathrm{j}}^2 + m_\mathrm{p}\cdot{r_\mathrm{p}}^2}{r_\mathrm{t}^2} + m}}}\,.$$

Po zjednodušení tak dostaneme netriviální vzorec:

$$t = \sqrt{\frac{2l\left(\dfrac{\frac{1}{2}m_\mathrm{j}{r_\mathrm{j}}^2 + m_\mathrm{p}\cdot{r_\mathrm{p}}^2}{r_\mathrm{t}^2} + m\right)}{mg}}\,.$$

Měření

Abychom omezili relativní nepřesnost měření způsobenou nenulovým reakčním časem člověka, bude použité jojo mít provázek o délce $l = 2\,\mathrm{m}$. Čím delší provázek, tím delší čas a tím menší relativní nepřesnost času. Jojo navineme, umístíme dostatečně vysoko, aby po odvinutí do ničeho nenarazilo, a pustíme. V tentýž moment spustíme stopky, které zastavíme, jakmile se provázek odmotá celý. Že se jojo odvinulo, poznáme nejen pohledem, ale i jemným škubnutím, které ucítíme, pokud provázek držíme v ruce. Aby bylo naše měření ještě přesnější, pro každou vzdálenost plastelínového prstence od středu joja měříme alespoň desetkrát. Deset měření pak zprůměrujeme a vypočteme z nich odchylku.[9]

Ve výše odvozeném vzorci počítáme s plastelínou jako s tenkým prstencem, který ideálně má zanedbatelnou tloušťku. Reálně prstenec plastelíny o hmotnosti $m_\mathrm{p} = 7\,\mathrm{g}$ zanedbatelnou tloušťku mít nebude, takže by se naměřené hodnoty měly od těch teoretických lišit. Abychom mohli hodnoty výpočtu a měření porovnat v jednom grafu, budeme jako poloměr prstence uvažovat poloměr pomyslné kružnice uprostřed tloušťky našeho skutečného plastelínového kola.[10] Ve vzorci si můžete všimnout, že pokud poloměr plastelínového prstence bude nulový, „zbude“ pouze moment setrvačnosti joja. Nastane tedy situace, kdy na joju žádná plastelína není.

Poloměr plastelíny	Průměrný naměřený čas/s	Odchylka/s
$r_{\mathrm{p}0} = 0{,}0\,\mathrm{cm}$	1,46	0,06
$r_{\mathrm{p}1} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$	1,40	0,03
$r_{\mathrm{p}2} = 1{,}0\,\mathrm{cm}$	1,60	0,05
$r_{\mathrm{p}3} = 1{,}5\,\mathrm{cm}$	1,72	0,04
$r_{\mathrm{p}4} = 2{,}0\,\mathrm{cm}$	1,90	0,04

Tab. 1: Výsledky měření

Hmotnost použitého joja je $m_\mathrm{j} = 22\,\mathrm{g}$, poloměr středové tyčky $r_\mathrm{t} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ a poloměr joja $r_\mathrm{j} = 2\,\mathrm{cm}$.

Jak je z grafu vidět, výsledky měření teoretickému předpokladu odvozenému na začátku odpovídají pouze chováním, nikoliv hodnotou, ačkoliv u některých se teoretická hodnota nachází v intervalu odchylek. Při výpočtu teoretického předpokladu jsme totiž zanedbali některé významné vlastnosti, jako například tření o provázek, nenulovou tloušťku plastelíny (ovlivní moment hybnosti), fakt, že osa otáčení joja je lehce posunutá od jeho osy souměrnosti, fakt, že při odvíjení provázku začínáme na větším poloměru, protože je nenulově tlustý, a poloměr osičky se, jak jojo klesá, zmenšuje. Dále jsme zanedbali ještě nespočet dalších jevů, které ovlivňují chování joja.

Také jsme při výpočtu teoretických hodnot počítali s tím, že změřené parametry joja (jeho hmotnost, poloměr…) jsme naměřili přesně, což se reálně nestalo.

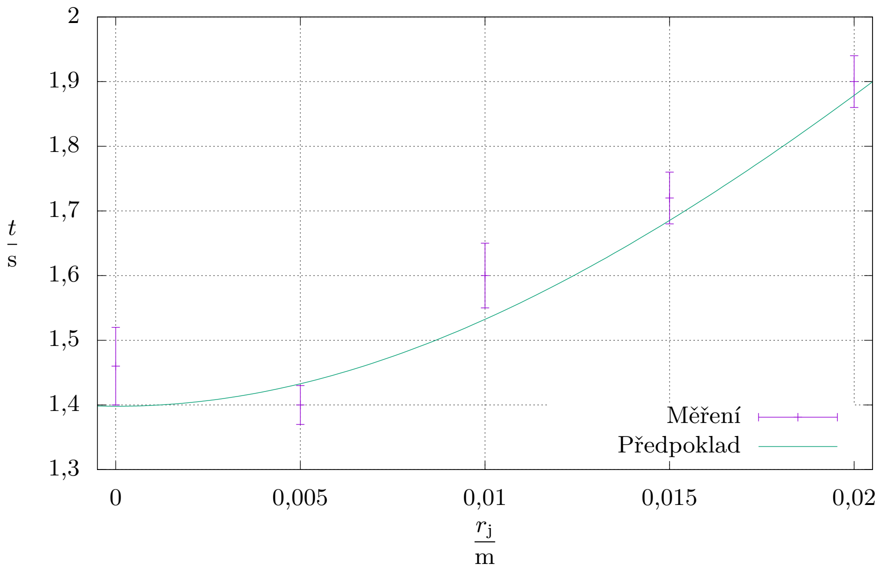
Zároveň značné chyby způsobí i naše pozornost. Stojíme-li dva metry nad koncem provázku a jojo se po klesnutí ihned začne vracet, špatně se odhaduje, kdy je vlastně opravdu v nejnižším bodě. Ono zmiňované škubnutí lanka totiž není tak výrazné, aby odhad usnadňovalo. To také mohlo způsobit, že první naměřená hodnota je výrazně větší, než druhá, ačkoliv podle teorie by to mělo být naopak.

Závěr

Naměřili jsme čas, za který se jojo odvine z provázku, a to jak pro jojo samotné, tak i pro jojo s přilepenou zátěží v podobě plastelíny různě daleko od středu.

[9] Jak na to se dozvíte na našich webových stránkách v sekci Hokus Pokus.

[10] Nadšenci si mohou na vlastní nebezpečí sami zkusit odvodit vzorec, který by zohlednil nezanedbatelnou tloušťku plastelíny.



Obr. 3: Výsledné naměřené hodnoty času

Podle teoretického předpokladu by se jojo bez plastelíny mělo odvíjet po nejkratší čas, avšak výsledek měření předpokladu neodpovídá. Můžeme se jen domnívat, zda to bylo způsobené nepřesnostmi měření nebo zanedbáním spousty faktorů ve výpočtu.[11] Jojo se bez plastelíny odvinulo za čas $t_0 = (1{,}46 \pm 0{,}06)\,\mathrm{s}$. Ostatní hodnoty odpovídají předpokladu, že čas se vzdáleností zátěže od osy souměrnosti joja poroste. Žádná se však, jak je vidět z grafu, nerovná hodnotě vypočtené. I zde může být odchýlení se způsobené nepřesnostmi v měření, avšak pro některá měření leží teoretická hodnota alespoň v intervalu odchylek. Spíš tedy neshodu teorie s praxí připíšeme zanedbáním při odvozování vzorce. Jojo s plastelínou nejblíže středu se odvinulo za čas $t_1 = (1{,}40 \pm 0{,}03)\,\mathrm{s}$, dále čas se vzdáleností rostl, $t_2 = (1{,}60 \pm 0{,}05)\,\mathrm{s}$, $t_3 = (1{,}72 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}$ a jojo s plastelínou nejdál od středu se odvinulo za $t_4 = (1{,}90 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}$.

Pomalého roztáčení při závaží daleko od osy otáčení využívají například setrvačníky, které můžete potkat i ve spoustě hraček, třeba oblíbených autíček. Podíváte-li se zpátky na vzorečky energií v teoretickém úvodu, můžete si všimnout, že čím větší moment setrvačnosti, tím více energie se uloží v podobě té otáčivé (na posuvnou pak „nezbude“, protože potenciální před puštěním joja máme omezené množství, tedy rychlost posouvání musí být nižší). Když se pak setrvačník někam kutálí, tření mu ubírá energii posuvnou, která se doplní ze „zásob“ té rotační a setrvačník se vydrží otáčet déle.

Soňa Husáková
`sona@vyfuk.mff.cuni.cz`

[11] Může to znít, že zanedbávání je špatně, ale mnohdy musíme některé věci zanedbat, abychom vůbec byli schopni se svými znalostmi matematiky příklad spočítat. Každé zanedbání však, jak můžete vidět, přináší oddálení se od skutečnosti.

Úloha II.V ... Dopplerova

7 bodů; průměr 4,21; řešilo 34 studentů

1. *Většina muzikantů ladí pomocí tzv. komorního A ($f = 440\,\mathrm{Hz}$). Zjistěte, jakou periodu a vlnovou délku bude mít tento tón, jestliže se zvuk šíří vzduchem rychlostí $v = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.*

2. *Když okolo vás projíždí sanitka, můžete si všimnout, že při přijíždění slyšíme její sirénu výše, než když odjíždí. Jaký bude rozdíl frekvencí tónů, které slyšíme, jede-li sanitka rychlostí $v = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a má-li siréna frekvenci $f_0 = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$?*

3. *S kamarádem jste se domluvili, že si půjdete zahrát tenis. Protože se chcete procvičit, navrhne vám, že na vás bude házet míčky z druhé strany kurtu. Abyste to neměli tak jednoduché, bude se při házení přibližovat k síti rychlostí $2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Kamarád hází každou sekundu jeden míček letící rychlostí $15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jak často k vám budou míčky dolétat? Jak se četnost míčků změní, když bude proti jejich letu působit protivítr, který míčky zpomalí o $5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (a kamarád se i v tomto případě bude stále přibližovat)?*

1. V řešení vycházíme ze základních vlastností vlnění a vztahů popisujících periodu a rychlost. Periodu vlny můžeme vypočítat ze vztahu $T = f^{-1}$, kdy po dosazení hodnoty frekvence $f = 440\,\mathrm{Hz}$ dostáváme výsledek $T = (440\,\mathrm{Hz})^{-1} \doteq 2{,}27\,\mathrm{ms}$.

   Ve Výfučtení jsme se mohli dozvědět, že rychlost vlny $v = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ můžeme popsat pomocí rovnosti $v = \lambda/T$. Abychom ale nedosazovali zaokrouhlenou hodnotu periody, popíšeme si rychlost pomocí frekvence jako $v = \lambda f$, z čehož už můžeme vyjádřit vlnovou délku $\lambda = v/f$.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{440\,\mathrm{Hz}} \doteq 0{,}77\,\mathrm{m}$$

   Vlnová délka komorního A je tedy přibližně $\lambda \doteq 0{,}77\,\mathrm{m}$.

2. V případě pohybu sanitky mluvíme o situaci, kdy se pohybuje vysílač. Tento případ popisuje Dopplerův jev pomocí vzorce

$$f = f_0 \frac{v}{v \mp v_v}\,.$$

   Abychom ale zachovali značení ze zadání, označíme si rychlost sanitky jako v a rychlost zvuku jako c (další časté označení pro rychlost zvuku).

$$f = f_0 \frac{c}{c \mp v}$$

   Při přijíždění sanitky platí, že rychlost c odečítáme, a naopak při jejím vzdalování rychlost přičítáme.

   Pro rozdíl frekvencí Δf proto platí vztah:

$$\Delta f = f_1 - f_2\,,$$
$$\Delta f = f_0 \frac{c}{c - v} - f_0 \frac{c}{c + v}\,,$$
$$\Delta f = f_0 \left(\frac{c(c + v) - c(c - v)}{(c - v)(c + v)} \right) = f_0 \frac{2cv}{c^2 - v^2}\,.$$

Při dosazení hodnot $c = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 80/3{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $f_0 = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$ vypočítáme i jeho hodnotu.

$$\Delta f = f_0 \frac{2cv}{c^2 - v^2}$$

$$\Delta f = 2{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz} \cdot \frac{2 \cdot 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 80/3{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{(340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - (80/3{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}$$

$$\Delta f \doteq 260\,\mathrm{Hz}$$

Rozdíl pozorovaných frekvencí při příjezdu a odjezdu sanitky je asi $263\,\mathrm{Hz}$. Tento rozdíl je podle každodenní zkušenosti slyšitelný běžným uchem.

3. Opět zde vyjdeme z předešlé rovnice pro frekvenci při pohybu zdroje. V tomto případě značí rychlost $v = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pohyb míčků vzduchem a rychlostí $v_v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ se pohybuje náš kamarád k nám. Vzhledem k faktu, že frekvence f_0 má hodnotu $1\,\mathrm{Hz}$, můžeme výslednou frekvenci popsat podobně jako v minulé podúloze:

$$f_1 = f_0 \frac{v}{v - v_v} = 1\,\mathrm{Hz} \cdot \frac{15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} - 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 1{,}2\,\mathrm{Hz}\,.$$

Míčky k nám budou tedy létat s frekvencí asi $1{,}2\,\mathrm{Hz}$.

Ve druhém případě nastává situace, kdy jsou míčky zpomalovány větrem o rychlosti $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což ovlivňuje rychlost, kterou se míčky pohybují. Proto namísto rychlosti $15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ bude rychlost míčků $v = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} - 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

$$f_2 = 1\,\mathrm{Hz} \cdot \frac{10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} - 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 1{,}25\,\mathrm{Hz} \doteq 1{,}3\,\mathrm{Hz}$$

Při protivětru budou tedy mít míčky pozorovanou frekvenci $f_2 = 1{,}3\,\mathrm{Hz}$.

Adam Krška
`adam@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**86**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	3	4	6	4	1	–	5	**23**	**55**
2.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**17**
3.	*Klára Vildomcova*	ZŠ Divišov	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**13**
4.	*Helena Rýparová*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**12**
5.	*Václav Prachař*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**
6.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**2**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**86**
1.	*Martina Černá*	ZŠ Pardubice – Polabiny	5	5	3	6	1	6	7	**33**	**71**
2.	*Jiří Račanský*	G, Brno-Řečkovice	5	5	6	5	2	6	7	**36**	**69**
3.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	5	5	6	3	2	–	6	**27**	**60**
4.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	5	6	6	–	–	6	**28**	**57**
5.	*Ema Kučerová*	G J. Jungmanna, Litoměřice	5	5	5	–	–	7	3	**25**	**51**
6.	*Vojtěch Mišičko*	G, Jateční, Ústí nad Labem	5	5	5	4	1	–	3	**23**	**47**
7.	*Ondřej Fikr*	G, Litoměřická, Praha	3	4	6	2	1	2	4	**22**	**44**
8.–9.	*Eliška Dřínková*	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**41**
8.–9.	*Lucie Rottová*	G Ústavní, Praha	5	5	6	–	–	–	3	**19**	**41**
10.	*Bartoloměj Vaníček*	ZŠ Na Šutce, Praha 8 - Troja	5	4	6	4	–	5	–	**24**	**38**
11.	*David Matoušek*	ZŠ Němčice nad Hanou	5	5	–	2	–	–	–	**12**	**36**
12.	*Tereza Sršňová*	G, Budějovická, Praha	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**35**
13.	*Štěpán Stichenwirth*	G J. Vrchlického, Klatovy	5	5	3	2	–	–	2	**17**	**34**
14.–15.	*Lukáš Kárník*	ZŠ Kostelec nad Černými lesy	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**33**
14.–15.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	5	1	1	2	1	3	2	**15**	**33**
16.	*Petr Švestka*	ZŠ Pardubice – Polabiny	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**31**
17.–18.	*Bruno Jan Šulc*	G Jindřichův Hradec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
17.–18.	*Eliška Urbanová*	ZŠ Divišov	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**29**
19.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**25**
20.	*Matěj Dušek*	ZŠ Roztoky	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**
21.–23.	*Tomáš Viktor Kubíček*	ZŠ a MŠ DOCTRINA, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
21.–23.	*Jana Novotný*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
21.–23.	*Jakub Roštík*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**22**
24.	*Natálie Boucová*	Masarykovo klasické G, Říčany	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
25.–26.	*Věra Marie Krejčí*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**20**
25.–26.	*Gabriela Volková*	Masarykovo G, Vsetín	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**20**
27.–28.	*Tereza Martišová*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
27.–28.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	5	0	0	1	–	–	–	**6**	**19**
29.	*Kristýna Kábrtová*	G a SOŠ Havlíčkova, Úpice	3	–	–	–	–	–	–	**3**	**18**
30.	*Melánie Boušková*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
31.	*Bianka Jirátková*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
32.–35.	*Ema Čekalová*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**15**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**86**
32.–35.	*Adam Ondračka*	ZŠ Pionýrů, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
32.–35.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**15**
32.–35.	*Anežka Štulová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
36.	*Pavel Fryjauf*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
37.	*Barbora Pauková*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
38.–39.	*Vítek Novotný*	G, Blansko	5	0	–	1	–	–	–	**6**	**11**
38.–39.	*Jan Štefanča*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
40.	*Patricie Labuťová*	ZŠ Jiráskovo n., Hradec Králové	4	1	–	–	–	5	–	**10**	**10**
41.	*Matěj Čentík*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
42.–43.	*Mai Chu Nhu*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
42.–43.	*Jan Mansfeld*	ZŠ Třebíz	2	1	0	–	–	–	0	**3**	**8**
44.	*Leontýna Helena Keates*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
45.–46.	*Karolína Foltýnová*	ZŠ U Hřiště, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
45.–46.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
47.–50.	*Michaela Marešová*	ZŠ Chyšky	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
47.–50.	*Lukáš Matoušek*	G, Česká Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
47.–50.	*Denisa Mazáčová*	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
47.–50.	*Vladimír Tůma*	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
1.	*Matouš Mišta*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	6	7	–	6	**30**	**66**
2.	*David Něnička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	5	6	5	6	–	7	**29**	**65**
3.	*Renata Brázdová*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	6	6	6	5	7	**35**	**63**
4.	*Magdalena Hybnerová*	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	5	6	4	6	–	4	**25**	**56**
5.	*Eva Barčová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	4	6	2	2	5	4	**23**	**53**
6.	*Jan Souchop*	G, Mikulov	–	4	6	2	4	–	5	**21**	**47**
7.	*Sebastian Ray*	ZŠ Školní, Bechyně	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**45**
8.	*Adam Bretšnajder*	G Z. Wintra, Rakovník	–	5	6	5	–	–	3	**19**	**44**
9.	*Jindřich Urban*	ZŠ Divišov	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**43**
10.–11.	*Pavla Šimová*	G, Šumperk	–	5	6	–	2	–	7	**20**	**42**
10.–11.	*Václav Verner*	PORG, Praha	–	5	4	5	1	–	3	**18**	**42**
12.	*David Vedral*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	6	5	–	–	3	**19**	**38**
13.	*Agáta Anna Štěpánová*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	5	1	1	1	–	3	**11**	**32**
14.–16.	*Jakub Merta*	ZŠ Brno - Bystrc	–	5	5	2	–	–	–	**12**	**28**
14.–16.	*Klára Rašková*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	**28**
14.–16.	*Ivan Žemlička*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**28**
17.	*Jakub Drábek*	Slovanské G, Olomouc	–	3	3	–	–	–	4	**10**	**26**
18.–19.	*Radim Gabriel*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	0	1	1	0	0	**7**	**23**
18.–19.	*Václav Vostal*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
20.–22.	*Rebeka Heřmanová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	–	2	–	–	4	**11**	**22**
20.–22.	*Jan Kroupa*	ZŠ T. G. Masaryka Klatovy IV	–	1	5	1	–	–	–	**7**	**22**
20.–22.	*Daniel Rýpar*	ZŠ K. Pokorného, Ostrava-Poruba	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
23.–25.	*Karel Kubeš*	G, Písek	–	5	0	1	–	–	–	**6**	**21**
23.–25.	*Vít Němec*	ZŠ a MŠ Tasovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
23.–25.	*Lucie Židková*	G Komenského, Havířov	–	5	6	–	–	3	7	**21**	**21**
26.–28.	*Adam Černý*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
26.–28.	*Magdaléna Jůzová*	ZŠ Brno - Bystrc	–	1	3	–	1	–	1	**6**	**19**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
26.–28.	*Kateřina Stefanová*	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**19**
29.	*Pavel Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**
30.	*Alexander Adámek*	ZŠ Hostýnská, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
31.–32.	*Antonie Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
31.–32.	*Kristýna Šeděnková*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
33.–34.	*Františka Kynčlová*	ZŠ Herčíkova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**15**
33.–34.	*Matěj Šicner*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**15**
35.	*Tomáš Dokulil*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**13**
36.–38.	*Lukáš Albrecht*	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**11**
36.–38.	*Oliver Kodyš*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**11**
36.–38.	*Vojtěch Muller*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
39.–41.	*Jiří Cepník*	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
39.–41.	*Romana Kolembusová*	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
39.–41.	*Matěj Krátký*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
42.–45.	*Teo Bumbálek*	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
42.–45.	*Vojtěch Fajstl*	ZŠ a MŠ Ptení	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
42.–45.	*Lukáš Hrdý*	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
42.–45.	*Klára Řeháková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
46.	*Tomáš Bořil*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
1.	*Vojtěch Kadeřábek*	G Mensa, Praha	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
2.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	6	6	7	6	**36**	**73**
3.	*Anežka Čechová*	G, Mikulov	–	5	6	2	6	7	5	**31**	**64**
4.	*Šimon Genčur*	Biskupské G, Brno	–	5	6	5	2	7	5	**30**	**57**
5.	*Daniel Čtvrtečka*	G, Budějovická, Praha	–	5	6	6	2	–	4	**23**	**49**
6.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**36**
7.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	2	–	–	–	–	**7**	**32**
8.	*Lukáš Rella*	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
9.	*Markéta Poláčková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**24**
10.	*Jakub Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**
11.	*Ivana Ludvíková*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**22**
12.	*Ondřej Petržík*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	5	–	–	–	7	–	**12**	**12**
13.–14.	*Jakub Mašek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**11**
13.–14.	*Anastasie Voronscaia*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	5	–	–	–	6	–	**11**	**11**
15.–17.	*Jan Kouba*	G, Prachatice	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**10**
15.–17.	*Kristián Matúš*	ZŠ a MŠ Veřovice	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**10**
15.–17.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
18.	*Eliška Marečková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	5	–	–	–	4	–	**9**	**9**
19.–22.	*Květa Barhoňová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	7	–	**7**	**7**
19.–22.	*Hanka Phanová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	7	–	**7**	**7**
19.–22.	*Jakub Škarda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	7	–	**7**	**7**
19.–22.	*Matěj Žambůrek*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	7	–	**7**	**7**
23.–26.	*Šárka Nejedlová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	6	–	**6**	**6**
23.–26.	*Ivan Pavle*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	6	–	**6**	**6**
23.–26.	*Zuzana Petržíková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	6	–	**6**	**6**
23.–26.	*Ema Vecková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	6	–	**6**	**6**
27.–37.	*Tomáš Benda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	6	6	7	7	7	7	38	76
27.–37.	*Barbora Černá*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Klára Forstová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Pavel Hikl*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Esther Eleonor Hromádková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Jana Jankovcová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Klára Lojdová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Evelína Lokvencová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Hoang Ly Nguyenová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Natálie Pekařová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
27.–37.	*Natálie Špirková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	5	–	**5**	**5**
38.–42.	*Ondřej Běhenský*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	0	**4**	**4**
38.–42.	*Danielle Fohlová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**4**
38.–42.	*Stela Provalilová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**4**
38.–42.	*Ondřej Tauer*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**4**
38.–42.	*Eliška Zelenková*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	4	–	**4**	**4**
43.	*Martin Franěk*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	2	–	**2**	**2**
44.–45.	*Dao Ngoc Ly*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	1	–	**1**	**1**
44.–45.	*Natálie Veberová*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	1	–	**1**	**1**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.