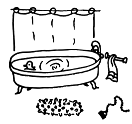
Úloha IV.4 ... Vítečná koupel

6 bodů; (chybí statistiky)



Když si jednoho dne Vítek napustil vanu, nedopatřením po napuštění ztratil špunt. Jakou rychlostí začala voda odtékat z Vítkovy vany, jestliže ji měl napuštěnou do výšky $h = 30\,\mathrm{cm}$? Vítek zpanikařil, a tak začal do vany zpětně napouštět vodu s přítokem $Q = 15{,}0\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$. V jaké výšce se voda ve vaně ustálila, jestliže byl obsah odtokového otvoru vany $S = 4{,}0\,\mathrm{cm^2}$?

Pro vyřešení této úlohy vyjdeme ze známého Torricelliho vzorce pro rychlost výtoku kapaliny malým otvorem z nádoby:

$$v_2 = \sqrt{2h_1 g}\,,$$

kde v_2 značí výtokovou rychlost, h_1 hloubku otvoru pod hladinou a g, jak už to bývá, gravitační zrychlení. Zvláštní značení a opodstatnění pro použití tohoto vzorce popíšeme v sekci níže.

Dosadíme-li za výšku $h_1 = h$, získáme výtokovou rychlost

$$v = \sqrt{2 \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \doteq 2{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Voda bude vytékat z vany rychlostí asi $2{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Pokud se má hladina vany ustálit, musí být objem vody, který odtéká, a objem vody, který přitéká, stejný. Pro výtok platí $Q = Sv$, kde S je obsah výtokového otvoru. Bude tedy platit rovnost

$$Q = Sv$$
$$Q = S\sqrt{2h'g}$$
$$h' = \frac{Q^2}{2gS^2}\,.$$

Hladina ve vaně se tedy ustálí ve výšce

$$h' = \frac{\left(2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot \left(4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}\right)^2} \doteq 2\,\mathrm{cm}\,.$$

Je tedy vidět, že i při velkém přítoku bude hladina ve výšce pouhých 2 cm.

Původ vzorečku

Ve Výfučtení 6. série, které je vydáno ve stejné brožurce jako toto vzorové řešení, popisujeme význam základní Bernoulliho rovnice ve fyzice kapalin. Z ní můžeme snadno odvodit Torricelliho vzorec, jak si v následujících řádcích zopakujeme.

Bernoulliho rovnice vyjadřuje zákon zachování mechanické energie v kapalinách v závislosti na rychlosti, výšce a tlaku.

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho g h = \text{konst.}$$

Takto vypadá rovnice celkem složitě, a proto si ji trochu rozebereme. Člen $\varrho v^2/2$ udává kinetickou energii kapaliny v závislosti na rychlosti v, $\varrho g h$ potenciální energii v závislosti na výšce h a p je potenciální energie tlaková.[1]

[1] Počítáme s tlakem vnějšího prostředí, takže nesmíme započítávat hydrostatický tlak samotné vody v nádobě – ten je totiž započten ve třetím členu.

Vidíme, že členy nemají jednotku energie J, ale jednotku tlaku Pa. To je způsobeno tím, že počítáme energii kapaliny vzhledem k jejímu jednotkovému objemu a ne vzhledem k její hmotnosti. Pokud bychom tedy rovnici vynásobili objemem kapaliny V, získali bychom správný rozměr v J.

Jelikož Vítek pozoruje kapalinu ve dvou stavech – klidnou a vytékající z vany, budeme potřebovat rovnice pro energii vody v těchto dvou různých stavech. Díky ZZME[2] budou obě energie v rovnosti. Index pro kapalinu na hladině bude 1 a pro vytékající vodu 2. Rovnice pak je

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 + \varrho g h_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2 + \varrho g h_2 \,.$$

Abychom ji zjednodušili, uděláme několik předpokladů. Voda na hladině je klidná, tudíž má nulovou rychlost, a tudíž i nulovou kinetickou energii. Nulová hladina potenciální energie bude[3] ve výšce výtoku a tlak p v okolí vany bude všude stejný, proto se z obou stran rovnice odečte. Takto nám odpadnou čtyři členy a zůstane

$$\varrho g h_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 \,,$$
$$v_2 = \sqrt{2 h_1 g} \,,$$

čímž dostáváme klíčový vztah.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

[2] zákon zachování mechanické energie

[3] Nulovou hladinu potenciální energie si můžeme zvolit, kde chceme, neboť vždy počítáme rozdíl energií oproti sobě, takže případná konstanta vzniklá jinou volbou nulové hladiny se odečte.