Úloha IV.3 ... Bufet v Burdž Chalífě

6 bodů; (chybí statistiky)

Lubor jednou dostal hlad, tak si šel dát k svačině párek v rohlíku, který po strávení uvolní $E = 263\,\mathrm{kcal}$ *(kilokalorií). Je ovšem ve vysoké budově a bufet je až v přízemí. Když si tedy párek koupí, ale zároveň musí vyšlapat schody do výšky* H*, říká si, jestli se mu to energeticky vůbec vyplatí.*

Uvažujte, že Lubor váží $m = 60\,\mathrm{kg}$*, stoupá průměrně o* $5\,\mathrm{m}$ *za minutu a průměrně spálí* $6\,000\,\mathrm{kJ}$ *denně jenom tím, že dýchá a udržuje tělesnou teplotu. S jakou účinností (v procentech) přeměňuje energii z párku v rohlíku ve svou potenciální energii, pokud se cestou do schodů zadýchá, a má tak o* $10\,\%$ *vyšší spotřebu, než kdyby jenom ležel? Jak vysoká by musela budova být, aby se mu to nevyplatilo?*

Získanou energii E z párku v rohlíku Lubor rozdělí při stoupání po schodech mezi dvě činnosti: na získání potenciální energie E_1 (stoupání do výšky) a udržování životních funkcí E_2. Pro výpočet si proto musíme obě energie vyjádřit.

Pro potenciální energii E_1 platí vzorec

$$E_1 = mgH\,,$$

kde m je Luborova hmotnost, H dosažená výška a g tíhové zrychlení.

Vyjádření energie E_2 ovšem musíme rozdělit do více kroků. Víme, že Luborovo tělo má výkon $P_0 = 6\,000\,\mathrm{kJ{\cdot}den^{-1}}$, přičemž výkon, který potřebuje pro stoupání, je o $10\,\%$ větší, neboli $P = 1{,}1P_0$.

Tímto výkonem ze sebe vydá energii E_2 během času t, pro který platí $t = H/v$, kde $v = 5\,\mathrm{m{\cdot}min^{-1}}$ je rychlost stoupání, neboť počítáme s tím, že Lubor stoupá rovnoměrnou rychlostí nahoru (můžeme tak použít vzorec pro rovnoměrný přímočarý pohyb). Tím pádem můžeme zapsat E_2 jako

$$E_2 = Pt = 1{,}1P_0\frac{H}{v}\,.$$

Po zkombinování těchto dvou zjištěných energií dostáváme vztah pro E:

$$E = E_1 + E_2 = mgH + 1{,}1P_0\frac{H}{v}\,,$$

ze kterého si můžeme odvodit výšku H jako

$$E = H\left(mg + \frac{1{,}1P_0}{v}\right)\,,$$

$$H = \frac{E}{mg + \frac{1{,}1P_0}{v}}\,.$$

Zjištění výšky H, do které Lubor vystoupá s energií z párku, je nyní už jen otázka dosazení hodnot. Nesmíme ale zapomínat na dosazení jednotlivých veličin ve správných jednotkách.

Vztah mezi kaloriemi a jouly, které ve fyzice používáme, je $1\,\mathrm{kcal} = 4\,186\,\mathrm{J}$ (jedna kilokalorie totiž odpovídá energii potřebné k ohřátí jednoho kilogramu vody o jeden stupeň Celsia). Z toho platí $E = 263 \cdot 4\,186\,\mathrm{J}$.

Převody výkonu a rychlosti si jsou velice podobné. V obou situacích nemáme pouze správný (jednotný[1]) čas. Pro jednoduchost převedeme oba děje na sekundy. V případě výkonu se jedná o převedení dne na sekundy, proto musíme jeho hodnotu vydělit[2] počtem sekund v jednom dni, neboli $P = 6 \cdot 10^6/86\,400\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

U rychlosti je to podobné, minuty musíme převést na sekundy, čili $v = 5/60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Dosazením hodnot do rovnice získáváme

$$H = \frac{263 \cdot 4\,186\,\mathrm{J}}{60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} + \dfrac{1{,}1 \cdot 6 \cdot 10^6/86\,400\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}}{5/60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}}\,,$$

$$H \doteq 731\,\mathrm{m}\,.$$

Luborovi se tedy nevyplatí dojít si pro párek v rohlíku, pokud je budova vyšší než $H \doteq 730\,\mathrm{m}$ (výsledek výše s více platnými ciframi používáme na další výpočet, tento výsledek považujeme za finální, poněvadž se zadanými hodnotami si můžeme dovolit pouze přesnost maximálně dvou platných cifer).

Účinnost pak vypočítáme jako podíl nutně potřebné energie k vystoupání (tedy pouze potenciální energie) a celkově spotřebované energie, tedy

$$\eta = \frac{E_1}{E_1 + E_2} = \frac{mgH}{H\left(mg + \dfrac{1{,}1P_0}{v}\right)}\,,$$

$$\eta = \frac{mg}{mg + \dfrac{1{,}1P_0}{v}}\,,$$

$$\eta = \frac{60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} + \dfrac{1{,}1 \cdot 6 \cdot 10^6/86\,400\,\mathrm{J \cdot s^{-1}}}{5/60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}}\,,$$

$$\eta \doteq 39\,\%\,.$$

Všimněme si, že nám účinnost vyšla nezávisle na výšce, do které Lubor stoupá. To je dobře, neboť účinnost přeměny energie musí mít pořád stejnou hodnotu, ať už jde do prvního či stého patra (ovšem pokud by byl Lubor například více unavený, čím více schodů by vyšel, tak by situace byla jiná – to ale naštěstí není náš případ).

Lubor tedy přeměňuje energii z párku na svou potenciální energii s účinností $\eta \doteq 39\,\%$.

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] V tomto případě (a mnohých jiných) není nutné převádět veličiny na základní jednotky, protože se jednotky času ve vzorci zkrátí. Proto je ale potřeba je převést na stejnou jednotku, ať už je jakákoliv.

[2] Pokud někdy váháte, jestli dělit nebo násobit, představte si, co vlastně počítáte. Za den Lubor spálí velké množství energie, takže za sekundu ji musí spálit méně, tudíž musíme dělit počtem sekund.