

Úloha IV.1 ... Demokratický výlet do přírody

5 bodů; (chybí statistiky)

Albert, Norbert, Herbert a Dagobert se vydali na výlet do přírody. Tato soudržná skupina kamarádů má však bohužel na spoustu věcí odlišné názory, a tak vždycky, když se měli rozhodnout, kterou ze dvou cest se vydat, hlasovali.

Zatímco Norbertovi, Herbertovi a Dagobertovi tenhle způsob rozhodování připadal dobrý, Albert měl pocit, že se hodně často může stát, že se neshodnou, neboť výsledek hlasování bude 2:2. Čas však ukázal, že ve skutečnosti byl mnohem častější výsledek 3:1.

Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost, že se čtyři kamarádi rozhodnou v poměru 3:1, jestliže vybírají mezi dvěma volbami a každý z nich vybírá nezávisle. Pravděpodobnost konkrétního případu je v této situaci podíl onoho konkrétního případu a všech možných případů. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodnou v poměru 2:2? Co je pravděpodobnější?

Každému z hochů můžeme přiřadit hodnotu jeho rozhodnutí – pokud se rozhodne pro první možnost, přiřadíme mu hodnotu 0, pokud pro druhou, přiřadíme mu hodnotu 1. Další možnost neexistuje, neboť se rozhodují pouze mezi dvěma cestami.

Nyní si můžeme vypsát všechny možnosti, jak mohlo rozhodování dopadnout, a jednoduše spočítat, kolikrát nastala možnost 3:1 a kolikrát možnost 2:2. Pojďme to tedy udělat. Nejjednodušší bude, pokud si výsledky rozhodování zaneseme do tabulky, abychom na žádný z případů nezapomněli. Asi netřeba upozorňovat, že v zadání úlohy jsme výsledkem 3:1 mysleli takový, kdy se 3 hlasy rozhodnou pro stejnou možnost nezávisle na tom, zda se jedná o tu první, či druhou.

Postupujeme tak, že začneme kombinací čtyř nul a následně měníme číslici co nejvíce vpravo s podmínkou, že nesmíme dosáhnout výsledku, který jsme již měli. Takto zajistíme zanesení všech kombinací.

| A | N | H | D | Výsledek |
|---|---|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 4:0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 3:1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 3:1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2:2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 3:1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 2:2 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 2:2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 3:1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 3:1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2:2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2:2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3:1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 2:2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 3:1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 3:1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4:0 |

Tab. 1: Výsledky rozhodování kluků, které označujeme jejich počátečním písmenem.

Výsledek rozhodování je dán počtem stejných číslic v jednom řádku ku počtu druhých stejných číslic v tom samém řádku, přičemž větší číslo píšeme jako první. Například rozhodnutí 0100 tak dopadlo v poměru 3:1, neboť tři kluci zvolili možnost 0 a jeden z kluků zvolil možnost 1. Ze stejných důvodů hlasování 1011 dopadlo taktéž v poměru 3:1.

Z celkového počtu různých rozhodování (tj. počet řádků v tabulce, čili 16) jich dopadlo 8 v poměru 3:1, zatímco jen 6 jich dopadlo v poměru 2:2.

Pravděpodobnost P_{31} , že rozhodování dopadne v poměru 3:1 je tedy počet případů ku celkovému počtu rozhodnutí, takže

$$P_{31} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Obdobně pravděpodobnost P_{22} , že rozhodování dopadne v poměru 2:2, je

$$P_{22} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 37,5\%.$$

Vidíme tedy, že zatímco rozhodnutí 3:1 nastane v polovině případů, rozhodnutí 2:2 nastane jen o něco více než ve třetině případů (přesněji v $P_{22} = 37,5\%$ případů).

A co kdyby bylo kluků více?

Při vyplňování tabulky jsme si mohli všimnout, že jsme vypsalí všechna možná čtyřciferná čísla v binární soustavě (zápis tohoto čísla se skládá pouze z jedniček a nul). Je to dáno tím, že každý z kluků se rozhoduje nezávisle, takže nastanou všechny možné kombinace jejich rozhodnutí (kterých bude 2^n , kde n je počet kluků).

Pro větší počet kluků bychom tedy postupovali úplně stejně, akorát by naše tabulka byla rozměrnější. Mohli bychom taktéž využít nějakého programu, který by množství jedniček a nul počítal za nás.

Robert Gemrot

robert@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.