výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

jsme rádi, že vás baví řešení fyzikálních úkolů a pustili jste se do řešení Výfuku. V této brožurce naleznete zadání druhé série úloh, ve které se zamyslíte nad Newtonovým tvrzením o pevném bodě nebo se dozvíte, jak funguje jojo, které si v rámci experimentu zkusíte vytvořit. V sérii nechybí ani Výfučtení, které se tentokrát zabývá Dopplerovým jevem. Řešení minulé série se co nevidět objeví na našich webových stránkách spolu s výsledkovými listinami a opravená řešení vám pak pošleme poštou spolu s další brožurkou.

Zcela mimořádně však už v této brožurce společně s druhým zadáním zasíláme i *řešení úloh první série*, která byla nedávno dokončena. Můžete tak už krátce po jejím skončení zhodnotit, zda jste na naše úlohy šli správnou cestou. Řešení si uschovejte, abyste s nimi za něco málo přes měsíc mohli porovnat ta svá.

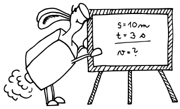
Pokud si kromě Výfuku chcete zasoutěžit i naživo, pak právě pro vás probíhá týmová soutěž *Náboj Junior*, která se letos uskuteční 22. listopadu na mnoha místech v republice. Registrovat se můžete do 17. listopadu, s registrací neváhejte, počet míst je omezen.

Pokud nás kromě právě probíhajícího podzimního setkání chcete opět potkat, přijďte se podívat na *Den otevřených dveří* na MFF UK, který probíhá 21. listopadu 2019 a kde Výfuk bude mít svůj stánek.

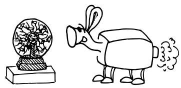
Hodně štěstí a zábavy při řešení druhé série přejí

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

matfyz

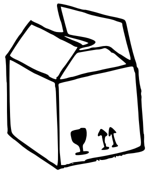


Zadání II. série



Termín odeslání: 2. 12. 2019 20.00

Úloha II.1 ... Uklízení ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

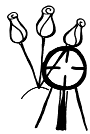


Jindra si řekl, že konečně nastal čas na jarní úklid. Do kartonové krabice se vleze 5 kg nestlačeného papíru. Tento papír Jindra sešlápnul na polovinu objemu a opět krabici doplnil, výsledný objem potom zase stlačil (nestlačený papír se stlačuje na polovinu, stlačený se již dále nestlačuje). Takto postup opakoval, dokud to bylo možné. Kolik kg papíru se v krabici nacházelo po třech opakováních? A kolik když byl Jindra s uklízením hotový (tj. když postup zopakoval hrozně mockrát)?

Úloha II.2 ... Řízky na výlet ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Eva s Katkou smažily řízky na výlet. Dopoledne jich Eva spálila o 30 % více než Katka. Odpoledne Eva spálila 2, Katka nespálila žádný. Na výletě potom spočítaly, že jich Eva za celou dobu spálila o 50 % více než Katka. Kolik řízků spálily při smažení obě dohromady?

Úloha II.3 ... Samopal ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



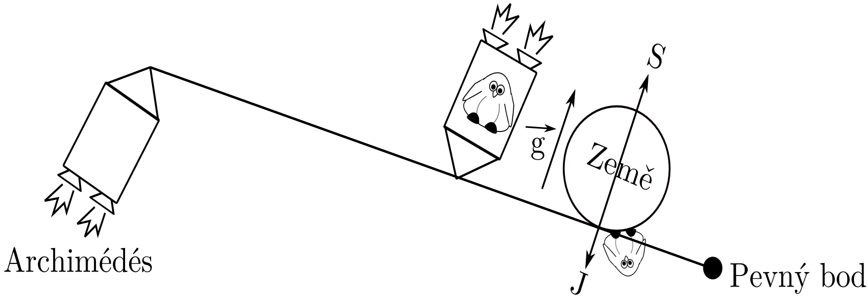
Pokud jste na pouti stříleli růže, jistě jste si všimli, že po výstřelu vám do ramene zatlačí puška silou takzvaného „zpětného rázu“. Jak velká je v průměru tato síla, která působí na rameno vojáka střílícího samopalem 800 ran za minutu? Střely vylétají rychlostí $v = 700\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a hmotnost jedné je $m = 3\,\mathrm{g}$.

Úloha II.4 ... Jednoduché stroje ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Archimédés jednou řekl: „Dejte mi pevný bod ve vesmíru a já pohnu Zemí.“ Vyplňme mu jeho přání. Mějme pevný bod čtyři poloměry Země daleko od Země a dlouhou pevnou tyč, která je v onom bodě zapřená. Země na tyči leží svým jižním pólem. Archimédés chce udělit Zemi takové zrychlení, aby tučňáci při jižním pólu zažívali stav beztíže: chtěl jako první zkoumat nelétavé ptáky ve stavu beztíže, aby vyvracel a potvrzoval hypotézy z Aristotelovy knihy „Perizoón kinesis,“ tedy o pohybech zvířat.

Tučňákům se ovšem tato myšlenka nezamlouvá, a tak umístili do vzdálenosti 100 světelných let raketový motor o tahové síle 100 MN. Archimédés má k dispozici milion raketových motorů o tahové síle 10 MN. Do jaké vzdálenosti má své motory umístit, aby se jeho přírodovědecký plán vydařil? Pevná tyč je polopřímka, která vychází z pevného bodu, pokračuje pod planetou Zemí a dále jsou na ni ve dvou bodech umístěné raketové motory (jedná se tedy o jednozvratnou páku).

Vleze se dlouhá tyč do naší galaxie?



Obr. 1: Ilustrace k zadání 4. úlohy.

Úloha II.5 ... Jak funguje jojo ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Jindra viděl zajímavé triky s jojem a hned začal přemýšlet, jak vlastně fungují z fyzikálního hlediska. Mějme tedy jojo, neboli těleso ve tvaru dvou válců o poloměru $R = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, jejichž středy spojuje osa se zanedbatelnou hmotností. Každý z disků váží $m = 50\,\mathrm{g}$ a provázek má délku $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$.[1]

1. Jojo se jistě dá do otáčení. K charakterizaci otáčivého pohybu je užitečné znát tzv. *kinetickou energii rotace* joja E_k. Kinetickou energii rotujícího válce lze vyjádřit jako $E_k = MR^2\omega^2/4$, kde M je jeho hmotnost a ω úhlová rychlost. Vyjádřete tuto energii pro jojo tak, aby nezávisela na rychlosti úhlové, nýbrž obvodové.

2. Když jojo pustíme směrem dolů, začne se provázek z osy odmotávat. Jakou úhlovou rychlost bude mít jojo těsně předtím, než dorazí na konec provázku? Poloměr osy, která spojuje středy válců a na které je namotán provázek, je $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$.

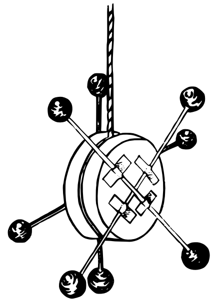
3. Když jojo narazí na konec provázku, jeho posuvný pohyb se zastaví a zůstane mu pouze úhlová rychlost. Poté se hned začne postupně zase namotávat směrem nahoru, než se ve výšce h úplně zastaví. Jak velká bude tato výška?

4. Jakou počáteční rychlostí v_0 bychom museli jojo hodit, aby se vrátilo do původní výšky (do ruky)? Myslíme tím takové hození, u kterého se bude jojo stále odmotávat z provázku bez podkluzování, jen s počáteční rychlostí v_0.

[1] Hmotnost provázku zanedbáme.

Úloha II.E ... Bojo(vé) jojo ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů



Čím je kolo těžší a větší, tím více nás stojí jej roztočit. Tomuto přírodnímu zákonu se nevyhne ani tak malé kolečko, jakým je jojo. Někteří z vás mohli v minulé úloze zkoumat existenci vztahu mezi tím, jak je jojo těžké a jak rychle se odvíjí na svém provázku – prověřme to nyní experimentálně! Seznamte se s délkou provázku na svém joju a změřte, jak dlouho trvá, než se vlastní vahou samo rozvine. Poté své jojo vylepšete a symetricky na něj, například pomocí špejlí, připevněte proměřené závaží[2] (např. z plastelíny), které se bude točit spolu s ním. Vyzkoušejte, jak ovlivní čas to, že jste přidali zátěž na střed joja (oproti joju bez závaží), ale také to, jak ovlivní čas odmotávání posouvání závaží dále od středu joja (v ideálním případě to můžete znázornit graficky). Nakonec popište, jaká časová změna by pro vás byla intuitivní a proč, a zda ji experiment potvrdil.

Úloha II.V ... Dopplerova ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů

1. Většina muzikantů ladí pomocí tzv. komorního A ($f = 440\,\mathrm{Hz}$). Zjistěte, jakou periodu a vlnovou délku bude mít tento tón, jestliže se zvuk šíří vzduchem rychlostí $v = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

2. Když okolo vás projíždí sanitka, můžete si všimnout, že při přijíždění slyšíme její sirénu výše, než když odjíždí. Jaký bude rozdíl frekvencí tónů, které slyšíme, jede-li sanitka rychlostí $v = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a má-li siréna frekvenci $f_0 = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$?

3. S kamarádem jste se domluvili, že si půjdete zahrát tenis. Protože se chcete procvičit, navrhne vám, že na vás bude házet míčky z druhé strany kurtu. Abyste to neměli tak jednoduché, bude se při házení přibližovat k síti rychlostí $2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Kamarád hází každou sekundu jeden míček letící rychlostí $15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jak často k vám budou míčky dolétat? Jak se četnost míčků změní, když bude proti jejich letu působit protivítr, který míčky zpomalí o $5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (a kamarád se i v tomto případě bude stále přibližovat)?

Poznámka: Níže najdete doprovodný text potřebný k vyřešení úlohy.

[2] Pochopitelně je také pro porovnání vhodné změřit i hmotnost samotného joja bez provázku.

Výfučtení: Dopplerův jev

Historie

Christian Doppler byl rakouský fyzik narozený v Salzburgu roku 1803. Po střední škole zde také začal studovat filozofii, poté se ale přesunul na *polytechnický institut Vídeň* (dnes pojmenován *Technická univerzita Vídeň*), kde se roku 1829 stal asistentem matematiky u profesora Adama Burga. Následně začal pracovat na Českém vysokém učení technickém v Praze.

V roce 1842, ve věku 38 let, vydal své dílo *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels*, kde popisuje jev vymykající se selskému rozumu: barva světla vzdálených hvězd, které pozorujeme, závisí nejen na charakteristikách hvězdy samotné (např. její velikosti), nýbrž i na tom, jak rychle se k nám přibližuje, nebo vzdaluje.

Závislost na rychlosti je přitom na první pohled neintuitivní. Představte si třeba jednu hvězdu, která se od Země nevzdaluje, a pak druhou, stejnou, která se od Země vzdaluje. V okamžiku, kdy se obě hvězdy míjí (nejen tehdy) a jsou vedle sebe, bychom podle Dopplera měli vidět, že obě mají jinou barvu!

Tento Dopplerův jev tak opět naráží na podobný paradox jako tzv. *Zenónův paradox letícího šípu*, a to o téměř dva tisíce let později. Vzhledem k experimentálnímu potvrzení Dopplerova jevu tak můžeme opět o něco určitěji tvrdit, že fyzikální stav věcí záleží i na rychlosti a ne jen na poloze.

Nezávisle na Dopplerovi studoval tento jev i francouzský[3] fyzik Hippolyte Fizeau, jenž se zasloužil o jeho popsání za pomoci světla a opravil několik chyb v Dopplerově teorii. Vyjádřil Dopplerův jev matematicky a v roce 1848 poprvé objevil změnu frekvence při vzájemném pohybu dvou těles, čímž i položil základy dnešním jevům pozorovaným hlavně v astronomii – rudému a modrému posuvu.

Vlnění

Pro pochopení Dopplerova jevu potřebujeme nejdříve vědět, co to je vlnění, na které má Dopplerův efekt dopad. Řekněme si proto více o základech popisu kmitavého pohybu a vln.

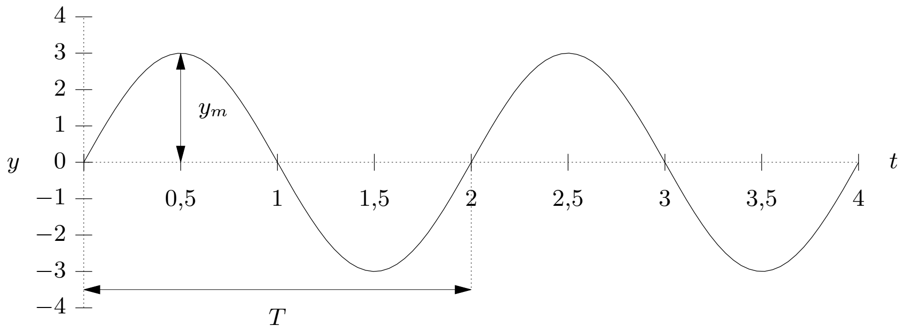
Fyzikálně můžeme vlnění popsat jako narušení nějakého prostředí (média), kdy se částice v něm začnou pohybovat. Pokud pozorujeme pohyby částic s odstupem, všimneme si, že se vytvořila vlna, která se v prostředí šíří. Nejlépe si můžeme tento jev, který jsme zatím vysvětlili dosti abstraktně, představit na situaci, kdy hodíme kámen do vody. Kámen rozruší vodní hladinu, čímž se začne do všech směrů šířit její výchylka, které říkáme vlna. Vodní hladina bude na některých místech výš a na jiných zase níž než ve své obvyklé výšce. Pokud se podíváme na jedno její místo, budeme pozorovat, že se periodicky (pravidelně dokola) pohybuje nahoru a dolů. Bude takzvaně *kmitat* okolo své původní polohy.

Obecněji, kmitání je periodická změna nějaké veličiny, vlnění je šíření této změny v prostoru a vlna je v prostoru cestující změna. Vlnu popisujeme pomocí několika veličin. Mezi ně patří její frekvence f, perioda T, vlnová délka λ nebo například rychlost šíření v. Tyto veličiny si nyní vysvětlíme. Při popisu budeme mluvit o mechanické vlně, která vznikla vhozením oblázku do jezera.

[3] Ve francouzštině se proto můžete setkat s označením *Doppler-Fizeau effect*.

Zaměřme se na jeden bod na hladině vody. Hladina vody se nepohybuje dopředu, nýbrž pouze nahoru a dolů (všechny body hladiny se tedy pohybují), takže dopředu se šíří jen vlna. Jeden bod na hladině tak kmitá okolo své výchozí polohy. Jeho umístění vyjadřujeme pomocí svislé osy y, kdy se vychyluje o nějakou hodnotu Δy od své původní. Položíme-li si původní hodnotu výšky do $y = 0$, bude se Δy pohybovat mezi maximálními výchylkami $-y_m$ a y_m. Výchylku[4] y_m, $[y_m] = \mathrm{m}$ (jestliže vložíme veličinu do hranarých závorek „[]“, chceme tím vyjádřit, její jednotku; kupříkladu pokud bychom chtěli říci, že čas t má jednotku s, zapíšeme to jako $[t] = \mathrm{s}$) značíme jako amplitudu vlny.

Pokud se budeme na tento bod nějakou dobu soustředit, uvidíme, že se vždy vrátí do své původní polohy a začne celý pohyb (kmit) znovu. Čas, který uběhne, než se bod v maximu vrátí do své původní polohy, nazýváme periodou T, $[T] = \mathrm{s}$ daného vlnění. Závislost polohy na čase je vyjádřena grafem 2.



Obr. 2: Graf polohy bodu v čase.

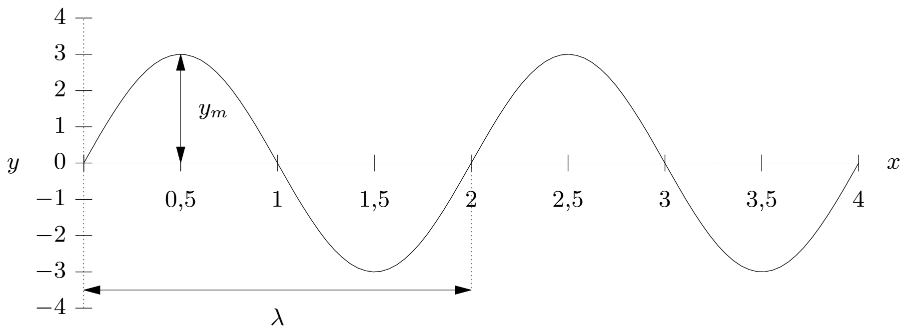
Podívejme se nyní na vlnu jako celek a řekněme, že se naše vlna šíří podél nějaké osy x, přičemž zdroj vlnění se nachází v $x = 0$. Víme, že vlna šířící se od kamene bude mít někde své vyšší a nižší body. Pokud zastavíme vlnu v čase a podíváme se na ni, zjistíme, že poloha y jednotlivých bodů je vlastně závislá na vzdálenosti x od zdroje (kamene). Tato závislost je zakreslena v grafu 3. Vzdálenost dvou bodů, které jsou ve stejné výšce, je vyjádřena veličinou λ, $[\lambda] = \mathrm{m}$ nazývanou *vlnová délka*.

Někdo by mohl namítat, že přeci body v $x = 0\,\mathrm{m}$, $x = 1\,\mathrm{m}$, a $x = 2\,\mathrm{m}$ mají všechny stejnou hodnotu $y = 0$, takže by vlnová délka měla být mezi body $x = 0\,\mathrm{m}$ a $x = 1\,\mathrm{m}$. Ovšem musíme si uvědomit, že bod musí také následovat stejnou polohu. Graf v $x = 0\,\mathrm{m}$ bude pokračovat nahoru, kdežto v $x = 1\,\mathrm{m}$ bude pokračovat dolů. Z toho vyplývá, že vlnová délka bude $\lambda = 2\,\mathrm{m}$.

Pokud si chcete hledání v grafech ještě zjednodušit, nebo si nejste jistí, které dva body byste měli v grafu 2 i 3 spojit, zaměřte se na maxima či minima, neboli na ta místa, kde je graf nejvíce nahoře nebo dole.

Vlny mohou být také popsány pomocí jejich frekvence f. Frekvence vyjadřuje, kolikrát se jeden kmit uskuteční za jednotku času. Protože víme, jak dlouho trvá jeden kmit, můžeme určit

[4] Některé druhy vlnění nemají amplitudu v metrech, neboť vlnění může být výchylka čehokoliv.



Obr. 3: Graf polohy více bodů podél osy x v jeden časový okamžik.

i frekvenci. Ta bude rovna převrácené hodnotě periody.

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

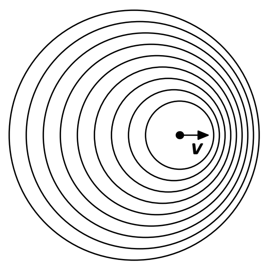
Jednotkou frekvence je hertz (Hz, $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$).

Vzhledem k tomu, že známe vzdálenost λ mezi stejnými stavy vlny i dobu T, kterou trvá, než se bod opět dostane do tohoto stavu, můžeme vypočítat rychlost šíření vlny

$$v = \frac{\lambda}{T}\,. \tag{2}$$

Dopplerův jev

Možná jste si někdy všimli, že když kolem vás projíždí auto záchranné služby, slyšíte vyšší tón sirény, když k vám přijíždí, než když odjíždí – pozorovali jste v praxi Dopplerův jev. O tomto jevu Doppler teoretizoval a v roce 1845 se Buys Ballot pokusil o jeho živou ukázku. V té době ovšem nebylo moc věcí, které dokázaly dosáhnout takových rychlostí, aby byl jev patrný. Naštěstí tehdejší vlaky toho schopné byly. A tak Ballot uspořádal akci, při které vzal dvě skupiny trumpetistů. Jednu usadil do vlaku a druhou nechal na nástupišti. Obě skupiny hrály stejný tón, ovšem trénovaní muzikanti slyšeli, že při příjezdu vlaku zněli hráči v něm výš než hráči na nástupišti. Naopak při odjezdu všichni slyšeli hráče uvnitř vlaku níže oproti těm na nástupišti (to mohli poznat bez přístrojů díky hudebnímu sluchu). Tím se v tehdejší době experimentálně potvrdil Dopplerův teoretický předpoklad.



Obr. 4: Znázornění vln při pohybu vysílače.

Nyní k vysvětlení tohoto jevu. Mějme těleso, které vysílá nějaké vlnění (zvuk, světlo či jiné), a druhé těleso, které vlnění naopak přijímá. Tato dvě tělesa si můžeme označit jako vysílač a přijímač. Dopplerův jev poté vzniká, jestliže se jedno nebo obě tělesa pohybují vůči sobě. Pokud následně budeme pozorovat vlnění jakožto přijímač, všimneme si, že vlnění změnilo svoji frekvenci oproti původní, kterou bylo vysíláno.

Pro jednoduchost si představme, že někde stojíte s kamarádem a kamarád na vás hází například tenisové míčky s konstantní frekvencí (např. jeden míček za sekundu). Pokud se ovšem váš kamarád začne pohybovat směrem k vám, všimnete si, že míčky k vám létají častěji (s vyšší frekvencí) než předtím, i když je kamarád hází stále stejně často, neboť míčkům stačí urazit menší a menší vzdálenost, což jim trvá kratší čas. Podobný efekt můžete zpozorovat, pokud se od vás kamarád začne vzdalovat. V takovém případě uvidíte, že míčky k vám létají o něco méně často (s menší frekvencí), než kdyby stál na místě.

Stejně tak platí, že pokud se my, jako přijímač, budeme pohybovat od zdroje, bude pozorovaná frekvence nižší a naopak při pohybu ke zdroji zpozorujeme vyšší frekvenci.

Změna frekvence nastává kvůli pohybu těles. Pohybující se těleso jakoby „dohánělo“ vlny, které dříve vyslalo ve směru pohybu, a tím je tlačí k sobě. Naopak „odbíhá“ od vln proti směru pohybu, čímž prodlužuje jejich vlnovou délku a snižuje jejich frekvenci. Celá analogie je vidět na obrázku 4.

Symetrie

Možná se ptáte, jestli záleží na tom, jestli se hýbe vysílač, nebo přijímač a sami sobě odpovídáte, že ne. Naopak na tom záleží – v obou případech bude Dopplerův jev trochu jiný. Proč? Nemělo by přeci jít o relativní rychlost obou? Odpověď si zkuste rozmyslet sami, než ji v příštím odstavci prozradíme. Jde o zajímavý myšlenkový experiment.

Důvodem absence symetrie je to, že oba případy jsou ze základu odlišné. Při pohybu zdroje se hýbe jen samotný zdroj, což je stejné, jako kdyby vlny cestovaly rychleji. Na druhou stranu, když se hýbe vysílač, tak se vlny nezrychlí, jen se změní jejich vlnová délka.

Pokud nastanou oba způsoby pohybu najednou, je důležité rozlišovat mezi oběma rychlostmi. Zavádíme tak rychlosti zdroje a přijímače vůči nehybnému médiu (nebo prostředí či vztažné soustavě, chcete-li). Ve většině případů je to rychlost vůči zemi.

Myšlenky v tomto odstavci vám snad pomohou k pochopení Dopplerova jevu. Na následujících řádcích se pustíme do odvození přesného matematického popisu. Může se to zdát jako těžký úkol, nicméně k němu vedoucí myšlenky jsme již v zásadě provedli.

Vzorec Dopplerova efektu

Při řešení podobných problémů často nepočítáme s vlnou jako s celkem, nýbrž pouze s jedním bodem na vlně (fází vlny), protože od nich se odvíjí perioda, frekvence i vlnová délka vlny (když známe maximum a víme, že je to maximum, dokážeme pak nakreslit celou vlnu). Proto si označme maximum vlny ($y = y_m$) jako naši fázi, kterou budeme popisovat. Konkrétně se budeme zabývat tím, jak daleko jsou tyto vrcholy od sebe vzdáleny, jak dlouhá je doba, kdy se k nám dostanou dva vrcholy, a kolikrát za sekundu se k nám dostanou.

Celou tuto situaci si můžeme popsat na příkladu dvou kamarádů s míčky, kdy každý míček označuje právě jednu fázi.

Pohyb přijímače Začněme situací, kdy je zdroj vlnění v klidu a přijímač se pohybuje. Přijímač má nějakou rychlost v_p, kterou se pohybuje vůči vysílači.

Příklad: Váš kamarád stojí naproti vám a hází na vás míčky. Když k němu půjdete rychlostí v_p, půjdete míčkům naproti. Chceme zjistit, o jak moc se změní čas T mezi dvěma chytnutími míčků po sobě v závislosti na rychlosti.

Když se pohybuje přijímač ke zdroji vlnění, jde v podstatě vlnám „naproti“. To znamená, že pro výslednou rychlost vlny v_c, se kterou se vůči nám bude pohybovat, bude platit $v_c = v \pm v_p$. Rychlost v je původní rychlost vlny a v_p je rychlost přijímače. Tu přičítáme, jestliže se přibližujeme ke zdroji. Při vzdalování ji naopak odečítáme.

Z rovnice (2) si můžeme odvodit, že pro periodu platí vztah $T = \lambda/v$. Po převedení vztahu do naší situace dostaneme $T = \lambda_0/v_c$, kde T je perioda z pohledu přijímače a λ_0 je původní vlnová délka vlny. Pokud zde použijeme předešlou rovnici pro v_c a použijeme vztah pro frekvenci, dostaneme rovnost

$$T = \frac{\lambda_0}{v \pm v_p} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v \pm v_p}{\lambda_0} \,.$$

Vlnovou délku λ_0 si můžeme odvodit z rovnice (2):

$$\lambda_0 = vT_0 \,,$$

přičemž T_0 je původní perioda vlny.

Kombinací těchto dvou vztahů dostáváme rovnici

$$f = \frac{v \pm v_p}{vT_0} \,,$$
$$f = f_0 \frac{v \pm v_p}{v} \,,$$

kde f_0 vyjadřuje původní frekvenci vlny.

Pohyb vysílače Pokud se vlny šíří volně do prostoru, mají tvar kružnice, která má střed v místě vypuštění vlny. To znamená, že pokud se bude zdroj pohybovat, bude se měnit i místo vypuštění vlny, čímž se bude měnit vlnová délka vlnění. Tato situace je znázorněna na obrázku 4.

Příklad: Kamarád se při házení míčku k vám začne přibližovat. Mezi každým vyhozeným míčkem překoná nějakou vzdálenost, kterou míček již nemusí urazit ve vzduchu, a tak nebude jeho let k nám tak dlouho trvat. Tím se zvedne frekvence míčků, kterou je chytáme.

Představte si nyní, že jste tak daleko od kamaráda, že je najednou více míčků ve vzduchu. Vlnovou délku takového vlnění, když kamarád-vysílač stojí, si označme λ_0. Když vysílač začne chodit, tak mezi dvěma hody ujde určitou vzdálenost, kterou si nazveme $\Delta\lambda$. O tuto vzdálenost bude vlnová délka vlnění (rozestup mezi míčky) kratší.

Ona změna vzdálenosti míčků, neboli u nás změna vlnové délky $\Delta\lambda$ bude opět vycházet z jednoduchého vztahu pro dráhu $s = vt$. Bude proto rovna součinu rychlosti vysílače v_v a periody vlnění T, neboli platí

$$\Delta\lambda = v_v T_0 \,,$$

kde f_0 je základní frekvence vlnění.

Při pohybu k přijímači se budou vlny dostávat blíže k sobě, z čehož můžeme usoudit, že budeme změnu vlnové délky $\Delta\lambda$ odčítat od původní vlnové délky λ_0. V opačném případě budeme $\Delta\lambda$ přičítat.

$$\lambda = \lambda_0 \mp \Delta\lambda = \lambda_0 \mp v_v T_0$$

Původní vlnovou délku si vyjádříme jako $\lambda_0 = vT_0$ z rovnice 2. Díky tomuto vyjádření můžeme předchozí vztah upravit do tvaru

$$\lambda = vT_0 - v_v T_0 = T_0(v - v_v) = \frac{v - v_v}{f_0} \,.$$

Nakonec při použití rovnosti $f = v/\lambda$ můžeme vyjádřit konečný vztah pro tuto situaci.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{v - v_v}{f_0}} = f_0 \frac{v}{v \mp v_v}$$

Pohyb přijímače i vysílače Pro rozdíl frekvence při pohybu jak přijímače, tak vysílače, musíme rozdíly frekvencí mezi sebou vynásobit, což nám dává rovnici

$$f = f_0 \cdot \left(\frac{v \pm v_p}{v}\right) \cdot \left(\frac{v}{v \mp v_v}\right) = f_0 \cdot \frac{v \pm v_p}{v \mp v_v}\,,$$

kde
v je rychlost vlnění v nějakém médiu,
v_p vyjadřuje rychlost přijímače vzhledem k médiu a
v_s představuje rychlost zdroje vzhledem k médiu.
Pokud se přijímač nebo vysílač pohybují k tomu druhému, bude u znamének rychlostí první možnost, v případě pohybu od sebe použijeme možnost druhou.

Využití

Dopplerův efekt lze popsat a spočítat relativně jednoduše, jak jste se mohli přesvědčit, nachází využití v mnoha klíčových odvětvích lidské vědy a techniky. Zde uvedeme jen některé z nich.

Astronomie

Dopplerův jev je v astronomii používán pro zjištění frekvenčního posuvu elektromagnetického záření, které hvězdy vydávají. Hvězdy vydávají záření o specifických vlnových délkách, které závisí na chemických prvcích nacházejících se ve hvězdě. Spektra pro jednotlivé prvky jsou známa, proto můžeme naměřené a referenční (pozemské) spektrum porovnat a určit, zda se jedná o rudý (vzdalování hvězdy), nebo modrý (přibližování) posuv.

Radary

Jev se také používá v některých typech radarů pro měření rychlosti vozidel. Radar vyšle paprsek na vozidlo, od kterého se paprsek odrazí a vrátí se zpět na čidlo radaru. Pomocí rozdílů frekvencí jsme následně schopni spočítat rychlost vozidla.

Lokalizační systémy

V lokalizačních a pozičních systémech má Dopplerův jev široké využití, kdy se s jeho pomocí určují překážky a relativní rychlost, kterou se přibližují. Použití nacházíme například u ponorek, kdy dvě ponorky mohou za pomoci vysílání signálů určit svoji polohu a rychlost, nebo u robotů, kteří se potřebují orientovat v prostoru.

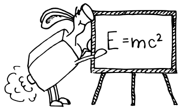
V přírodě je Dopplerův jev využíván u zvířat s echolokací (netopýři, delfíni…) pro detekci překážek bez použití zraku.

Závěr

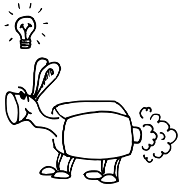
Dopplerův jev je velice zajímavý i užitečný jev, který je používán v mnoha odvětvích fyziky i obyčejného života. Popisuje změnu vlnové délky, resp. frekvence při vzájemném přibližování či vzdalování dvou objektů, z nichž jeden vysílá nějaký typ vlnění a druhý jej přijímá. Představili jsme si jeho podstatu a jeho odvození. Snad již tedy nebudete zaskočeni, až kolemjedoucí muzikanti budou hrát falešně!

Jindřich Dušek
jindra@vyfuk.mff.cuni.cz

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz



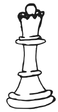
Řešení I. série



Úloha I.1 ... Královna v šachu

5 bodů; (chybí statistiky)

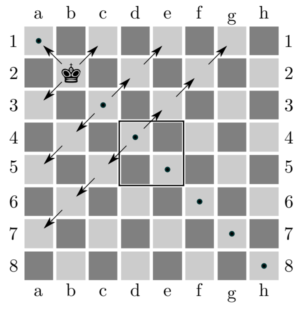
Jindra si při každé partii šachu dobře uvědomuje, jakou moc má královna a jak často ji jeho protivníci přehlížejí a podceňují. Nalezněte proto všechny pozice na šachovnici, na kterých má královna největší moc – tu uvažujme jako procento všech políček, která ohrožuje, tj. na která může královna jedním tahem vstoupit. Přítomnost ostatních figurek zanedbejte.



Šachovnici si můžeme představit jako jednoduchou mřížku, která obsahuje 8 řádků (označme si je A–H) a 8 sloupců (1–8). Tahy, které královna na šachovnici může provést, jsou velice jednoduché – může se posunout o libovolný počet polí horizontálně, vertikálně, nebo diagonálně. Abychom zjistili, kde má královna největší moc, je důležité si uvědomit, jak se možné tahy mění v závislosti na pozici královny.

Pokud královnu postavíme do rohu šachovnice, například na pozici A1, bude se moci posunout o 7 políček vertikálně dolů a o 7 horizontálně doprava. Pokud ji umístíme například na pole C5, můžeme ji dále sunout o 4 pole vertikálně nahoru, o 3 pole vertikálně dolů, o 2 pole horizontálně doleva a o 5 polí horizontálně doprava. V obou případech můžeme královnu v horizontálním a vertikálním směru posunout maximálně o 14 polí. Jelikož je hrací plocha čtvercová, od okrajů to bude mít figurka vždy stejně daleko, nehledě na její souřadnice. O tom, kde má královna nejvýhodnější pozici, tak rozhoduje pohyb diagonální, tedy po úhlopříčkách.

Pokud si královnu postavíme opět do pole A1, můžeme ji posunout po diagonále ve směru H8 o 7 polí. Poté na poli B2 může královna popojít ve směru H8 o 6 polí, nazpět ve směru A1 o 1 pole, a ve směrech C1 a A3 také o 1 pole. Z toho vyplývá, že když měníme pozici královny na jedné úhlopříčce, počet políček, která jsou k dispozici, se na této úhlopříčce nemění. Nastává tedy stejná situace jako například při horizontálním posunu. Co se ale naopak mění, je možnost pohybu na úhlopříčce druhé. Čím blíže je figurka středu hrací plochy, tím větší má možnosti pohybu v kolmém směru. Jelikož má naše hrací pole sudý počet sloupců i řádků, nemůžeme najít jedno prostřední políčko. Královna tak má největší moc na čtyřech centrálních polích, tedy D4, D5, E4, E5. Na každém z nich má možnost se posunout na dalších 27 jiných polí, což tvoří přibližně 42 % z celkového počtu polí.



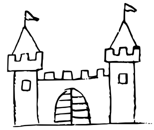
Obr. 5: Pozice královny na šachovnici

Karolína Letochová

Úloha I.2 ... Prohlídka hradu

5 bodů; (chybí statistiky)

Organizátoři Výfuku si o prázdninách přivydělávají jako průvodci na hradě, kde jsou 3 různě dlouhé prohlídkové trasy a každou provází jiný průvodce. Julča má trasu dlouhou 30 minut, Marťa 40 minut a Kája 45 minut. Ráno začínají všechny tři provázet v 9 hodin u brány. V kolik hodin se všechny opět potkají u brány, jestliže návštěvníky provázejí nepřetržitě celý den?



Nejdříve si můžeme představit časovou osu a časy na ní podle toho, jak organizátorky provádí své trasy. Jako první bude mít hotovo Julča, musela by ale čekat 10 min na Marťu, a tudíž bude pokračovat. My hledáme takový čas, ve kterém všechny tři organizátorky ukončí svoji prohlídku současně. Můžeme tedy jednotlivé časy skládat na časovou osu, dokud všechny tři celkové intervaly nebudou stejné. K tomu se v matematice využívá nejmenší společný násobek (NSN) těchto tří čísel. Ten se nám hodí, protože nám dokáže říci, jak musíme zkombinovat různá čísla tak, abychom z nich dostali co nejmenší číslo, které je možné získat znásobováním jejich společných částí. Proto si jednotlivé časy rozložíme na prvočísla:

$$t_\mathrm{J} = 30\,\mathrm{min} = 2 \cdot 3 \cdot 5\,\mathrm{min}$$
$$t_\mathrm{M} = 40\,\mathrm{min} = 2^3 \cdot 5\,\mathrm{min}$$
$$t_\mathrm{K} = 45\,\mathrm{min} = 3^2 \cdot 5\,\mathrm{min}$$

NSN se skládá následovně – z daných čísel vytvoříme součin největších mocnin od každého čísla. V našem příkladě by to tedy vypadalo:

$$t_\mathrm{NSN}(t_\mathrm{J}; t_\mathrm{M}; t_\mathrm{K}) = t_\mathrm{NSN}(30; 40; 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\,\mathrm{min} = 360\,\mathrm{min}$$

Nejkratší čas, po kterém se tři organizátorky sejdou, je 6 hodin. Julča, Marťa a Kája se střetnou zase u brány až v 15:00.

Můžeme se ujistit, že každá z provázejících stihla udělat celočíselný počet prohlídek – kdyby ne, tak by naše řešení nebylo správné.

Julča má trasu 30 min, stihne tedy udělat $360/30 = 12$ prohlídek. Marťa se čtyřicetiminutovou trasou stihne udělat $360/40 = 9$ prohlídek a Kája s trasou délky 45 min pak $360/45 = 8$ prohlídek.

Počty prohlídek nám vyšly celočíselně, což znamená, že naše řešení je správné. Můžeme si také všimnout, že tyto počty nemají společného dělitele – kdyby měly, holky by se potkaly už předtím.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.3 ... Hlavně se pořádně drž

6 bodů; (chybí statistiky)

Adama zajímalo, s jakým zrychlením se rozjíždí metro, a proto, když stálo v klidu ve stanici, vběhl dovnitř a položil na jeden konec vagónu kuličku. Jakmile se souprava začala rozjíždět, začal měřit čas a zjistil, že po čase t kulička narazila do protějšího konce vagónu. Zde už zůstala, zatímco souprava zrychlovala nadále. Doma zjistil, že jeden vagón je dlouhý s. Zjistěte jako Adam, s jakým zrychlením se metro rozjíždí a jakou rychlost mělo v okamžiku nárazu kuličky.

Poloměr kuličky neuvažujte a úlohu spočítejte jak obecně, tak pro hodnoty $t = 5\,\mathrm{s}$ a $s = 18\,\mathrm{m}$.

Předpokládejme, že kulička je zanedbatelně malá a kutálí se bez prokluzování nebo ztrát energie. Při rozjíždění metra se začne pohybovat vzhledem k samotnému metru, ovšem vzhledem k zemi zůstává statická. Proto rychlost, kterou se kulička pohybuje uvnitř metra, je stejná, jakou se metro pohybuje relativně k zemi.

Dráhu zrychleného pohybu můžeme vypočítat pomocí vzorce $s = s_0 + v_0 t + at^2/2$, kde s_0 vyjadřuje již ujetou dráhu, v_0 značí počáteční rychlost kuličky, a značí zrychlení a t čas. Při dosazení $s_0 = 0\,\mathrm{m}$ (kulička zatím neujela žádnou dráhu) a $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (kulička je na začátku v klidu) můžeme ze vzorce odvodit vztah pro zrychlení

$$a = \frac{2s}{t^2}\,,$$

$$a = \frac{2 \cdot 18\,\mathrm{m}}{(5\,\mathrm{s})^2}\,,$$

$$a = 1{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Při číselném dosazení do tohoto vztahu získáváme zrychlení metra $a = 1{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což, pro zajímavost, zhruba odpovídá skutečnému zrychlení metra v Praze!

Konečnou rychlost metra v nyní vypočítáme pomocí rovnice pro rychlost zrychleného pohybu $v = v_0 + at$, kde v_0 je již zmíněná počáteční rychlost, která má hodnotu $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ při zrychlování kuličky z klidu.

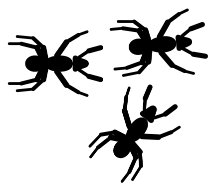
$$v = at = 1{,}44\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 5\,\mathrm{s} = 7{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

V okamžiku nárazu kuličky se metro pohybuje rychlostí $v = 7{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Mravenci na slunci

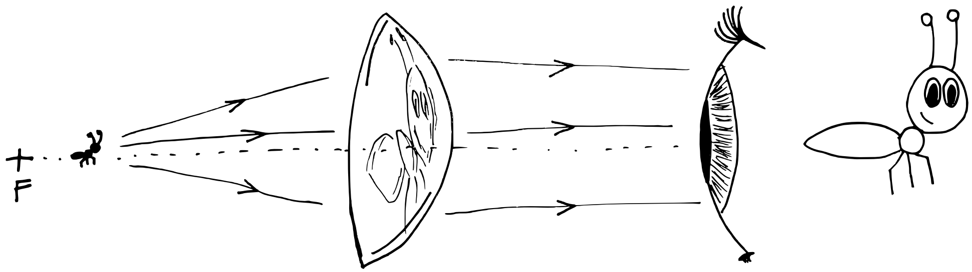
6 bodů; (chybí statistiky)



Soňa našla starou krabici a v ní troje brýle. První měly kruhové čočky o poloměru $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ a optické mohutnosti $\varphi_1 = 10\,\mathrm{D}$ (dioptrií).[5] Čočky druhých brýlí byly tvaru čtverce o straně $a = 5\,\mathrm{cm}$ a jejich optická mohutnost $\varphi_2 = 6{,}25\,\mathrm{D}$. Třetí brýle měly čočky ve tvaru rovnostranného trojúhelníka o straně $b = 5\,\mathrm{cm}$ a optickou mohutnost $\varphi_3 = 20\,\mathrm{D}$. Soňa pak šla s těmito brýlemi ven na polední slunce pozorovat mravence. Kterými brýlemi si při vzdálenosti $h = 10\,\mathrm{cm}$ mravence zvětší, ale neupeče jej? Kterými brýlemi dosáhne největšího výkonu ohřevu, když si pak bude chtít rozdělat oheň na opékání špekáčků (při rozdělávání ohně může Soňa brýle umístit do libovolné vzdálenosti)?

Nejprve bychom si měli připomenout, jakým způsobem fungují brýle nebo lupy. Pokud si obraz zvětšujeme takovým způsobem, že jej pozorujeme přímo na čočce (tedy ne na nějakém stínítku), říkáme mu obraz nepravý (někdy neskutečný). Takovýto obraz lze pozorovat, pokud je pozorovaný předmět ke spojné čočce blíže než její ohnisko. Jinými slovy, vzdálenost předmětu h nesmí být od čočky větší než ohnisková vzdálenost f.

[5] Optická mohutnost je převrácená hodnota ohniskové vzdálenosti.



Obr. 6: Jak spojná čočka brýlí funguje jako lupa.

Ohniskovou vzdálenost čočky můžeme určit z její optické mohutnosti φ, která se udává v jednotkách, které nejspíše znáte, totiž v dioptriích. Ohniskovou vzdálenost vypočítáme v metrech podle následujícího vzorce:

$$f = \frac{1}{\varphi}\,.$$

Když dosadíme za φ pro jednotlivé brýle, dostáváme $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $f_2 = 16\,\mathrm{cm}$ a $f_3 = 5\,\mathrm{cm}$. Vidíme, že druhé brýle určitě použít můžeme, protože $h < f_2$ (mravenec je tedy před ohniskem a vznikne zvětšený obraz). Zato třetími brýlemi si rozhodně mravence nezvětšíme, obdrželi bychom skutečný obraz, který nelze pozorovat očima přímo (bylo by možné ho promítnout na stínítko).

Použitím prvních brýlí, kde by mravenec byl přímo v ohnisku, bychom obraz neobdrželi, a navíc by hrozilo, že sluneční světlo mravence uškvaří. Jedna z vlastností čoček totiž je, že se rovnoběžně přicházející paprsky (ze Slunce) sbíhají do ohniska. V ohnisku se tak seběhne hodně paprsků, které by mohly mravence uškvařit.

Dále se úloha ptá na výkonnost ohřevu. Tento výkon je zcela nezávislý na ohniskové vzdálenosti, závisí pouze na ploše obsahu čočky (tedy na „množství“ slunečních paprsků, které na čočku dopadnou). Na každý metr čtvereční na Zemi, kdybychom jej umístili kolmo ke Slunečním paprskům, dopadá nejvýše 1 360 W. Proto stačí porovnat plochy čoček.

Obsah první čočky určíme ze vztahu pro výpočet obsahu kruhu:

$$S_1 = \pi r^2\,.$$

Dosadíme-li v centimetrech, obdržíme obsah $S_1 \doteq 19{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Obsah druhé čočky je obsah čtverce o straně $a = 5\,\mathrm{cm}$:

$$S_2 = a^2\,.$$

Obsah čočky nám vychází jako $S_2 = 25\,\mathrm{cm}^2$. Třetí čočka má tvar rovnostranného trojúhelníku. Obsah rovnostranného trojúhelníku se stranami o délce b a výškou v_b spočítáme jako:

$$S_3 = \frac{bv_b}{2} = \frac{b \cdot b \cdot (\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2\,,$$

protože v rovnostranném trojúhelníku je $v_b = b\sqrt{3}/2$ (z Pythagorovy věty). Dosadíme-li, obdržíme výsledek $S_3 \doteq 10{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

Nejvýhodnější je tedy k zapálení ohně použít čtvercové brýle, protože mají největší plochu. Soňa musí brýle umístit tak, aby objekt (papír, dřevo), který chce zapálit, byl v ohniskové vzdálenosti brýlí.

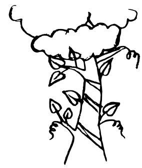
Poznámka: v reálném světě se jen velmi zřídka potkáte s brýlemi o 20 dioptriích. Většina zmiňovaných hodnot se často pohybuje mezi -5 a $+5\,\mathrm{D}$, přičemž tyto hodnoty často neoznačují optickou mohutnost čočky brýlí jako takovou, ale spíše jak velká je korekce ohniskové vzdálenosti celkové soustavy s okem.

Marco Souza de Joode
joode@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.5 ... Jack a fazole

7 bodů; (chybí statistiky)

Před dávnými časy žil šikovný obchodník Jack. Na trhu se mu podařilo získat kouzelné fazole, které si večer zasadil za domem. Ráno se nestačil divit; ze země trčel mohutný fazolový stonek, a jelikož byl Jack zvídavý, začal po něm šplhat. Na vrcholu stonku ho čekalo překvapení; ocitl se na obřím mraku, na kterém nejenže mohl stát, ale tento mrak dokonce nesl obří statek. Jack se usadil a začal přemýšlet nad fyzikou skrytou za těmito jevy. Pomůžete mu?



1. *Zjistěte, jak vysoko se Jack vyšplhal, pokud vyrazil rychlostí $v = 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a svého cíle dosáhl po deseti hodinách.*
2. *Jackovi nešlo do hlavy, že by mohl na mraku stát, protože věděl, že shluky ve vzduchu se vznášejících kapiček nemohou unést nic většího než je samotné. „Třeba je to nějaký balon,“ pomyslel si a začal počítat. Jaký plyn by za normálního tlaku takový mrak o objemu jedné setiny km^3 musel obsahovat, pokud by měl unést $10\,000\,\mathrm{t}$ těžký obří statek?*
3. *Po úvahách se Jack vydal do statku, kde našel slepici, která snáší zlatá vejce, ale přitom si vesele pobíhá po dvorku bez známek přidané tíhy ve zlatě. Zjistěte, kolikrát těžší by byla slepice nesoucí zlaté vejce než obyčejná slípka vážící $m_\mathrm{S} = 2{,}5\,\mathrm{kg}$. Údaje jako hmotnost či objem vejce si dohledejte a nezapomeňte v řešení uvést zdroj. Předpokládejte, že slepice snáší jedno zlaté vejce denně, které zezlátne až při snesení předešlého vejce.*

1. Nejdříve si uděláme zápis známých veličin:

$$
\begin{aligned}
v &= 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,\\
t &= 10\,\mathrm{h}\,,\\
s &= ?
\end{aligned}
$$

Abychom mohli příklad dále snadno počítat, převedeme všechny veličiny do základních jednotek:

$$t = 10\,\mathrm{h} = 36\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Nyní použijeme vzorec pro výpočet dráhy z rychlosti a času $s = v \cdot t$:

$$
\begin{aligned}
s &= v \cdot t\\
s &= 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 36\,000\,\mathrm{s}\\
s &= 9\,000\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{km}\,.
\end{aligned}
$$

Jack se tedy vyšplhal do výšky 9 kilometrů.

2. Klíčem k řešení je uvědomit si, že aby mohl obří statek stát na mraku, musí být tíhová a vztlaková síla v rovnováze kvůli prvnímu Newtonovu zákonu. Protože je ale mrak tak velký, nesmíme zanedbat ani hmotnost plynu v pomyslném balónu. Vyjádříme tedy celkovou hmotnost mraku i se statkem m_c, kde $V_m = 0{,}01\,\mathrm{km}^3 = 10^7\,\mathrm{m}^3$ je objem mraku, $m_\mathrm{s} = 10\,000\,\mathrm{t} = 10^7\,\mathrm{kg}$ hmotnost statku a ϱ_p hustota plynu v balonu:

$$m_\mathrm{c} = m_\mathrm{s} + V_m \cdot \varrho_\mathrm{p}\,.$$

Z rovnosti vztlakové síly podle Archimédova zákona a tíhové síly si vyjádříme hustotu plynu:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{c} g &= V \varrho_\mathrm{v} g\,,\\ m_\mathrm{s} + V_m \cdot \varrho_\mathrm{p} &= V \varrho_\mathrm{v}\,,\\ \varrho_\mathrm{p} &= \varrho_\mathrm{v} - \frac{m_\mathrm{s}}{V}\,. \end{aligned}$$

Teď do vzorce dosadíme zadané hodnoty veličin a hustotu vzduchu. Protože máme uvažovat normální tlak, hustota vzduchu bude mít hodnotu[6] přibližně $\varrho_v \doteq 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$:

$$\begin{aligned} \varrho_\mathrm{p} &= 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} - \frac{10^7\,\mathrm{kg}}{10^7\,\mathrm{m}^3}\,,\\ \varrho_\mathrm{p} &\doteq 0{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,. \end{aligned}$$

Výsledek porovnáme s hustotami plynů. Nejblíže našemu výsledku je hustota helia, která je $\varrho_\mathrm{He} = 0{,}18\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Další plyny, jež jsou relativně blízko vypočtené hodnotě, jsou vodík $\varrho_\mathrm{H} = 0{,}09\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, nebo methan $\varrho_{\mathrm{CH}_4} = 0{,}71\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, avšak tyto hustoty už jsou od naší hodnoty dále než helium.

Mrak by tedy musel obsahovat převážně helium, aby unesl obří statek, jednalo by se nejspíše o směsici plynů.

3. Z obecné charakteristiky slepičího vejce[7] zjistíme, že hmotnost vejce je $m_\mathrm{v} \doteq 60\,\mathrm{g}$ a jeho objem $V_\mathrm{v} \doteq 50\,\mathrm{cm}^3$. Teď spočítáme, jaká by byla hmotnost vejce, pokud by bylo zlaté (hustota zlata je $\varrho \doteq 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$). Nezapomeneme při tom vhodně zaokrouhlit.

$$\begin{aligned} m &= V \varrho\,,\\ m_\mathrm{zv} &= 50\,\mathrm{cm}^3 \cdot 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}\,,\\ m_\mathrm{zv} &\doteq 1\,000\,\mathrm{g}\,. \end{aligned}$$

Teď od hmotnosti zlatého vejce odečteme hmotnost obyčejného vejce a tím určíme, o kolik gramů bude těžší slepice se zlatým vejcem:

$$m_\mathrm{r} = 1\,000\,\mathrm{g} - 60\,\mathrm{g} \doteq 940\,\mathrm{g}\,.$$

[6] Hodnota odečtena z tabulek.
[7] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Vejce`

Abychom zjistili, kolikrát bude slepice se zlatým vejcem těžší, vydělíme její hmotnost hmotností obyčejné slepice:

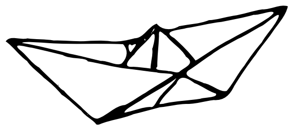
$$n = \frac{m_s + m_r}{m_s}\,,$$
$$n = \frac{2\,500\,\mathrm{g} + 940\,\mathrm{g}}{2\,500\,\mathrm{g}}\,,$$
$$n = 1{,}4\,.$$

Slepice nesoucí zlaté vejce by byla přibližně 1,4krát těžší než normální slepice.

Lubor Čech
lubor@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.E ... Lodička

7 bodů; (chybí statistiky)



Plastelína má velmi široké využití – od vděčné hračky pro děti přes šikovný stojan na tužky až po perfektní improvizované těsnění. Jednou z mnoha věcí, které z ní lze vyrobit, jsou lodičky.

Z jednoho válečku[8] plastelíny vytvořte loďku, která unese co nejtěžší náklad (musí přitom stále plavat). Porovnejte různé modely a zašlete nám jejich fotografie. Který unese nejvíc a proč? Změřte přesně nosnost a hloubku ponoru. Tři nejlepší a nejoriginálnější konstruktéry sladce odměníme.

Teorie

Všechna tělesa, která ponoříme do kapaliny, jsou nadlehčována hydrostatickou vztlakovou silou. Její velikost je podle Archimédova zákona rovna tíze kapaliny vytlačené tělesem. Závisí tedy na objemu ponořené části tělesa (tolik kapaliny bylo vytlačeno), hustotě kapaliny (z objemu a hustoty můžeme vypočítat hmotnost) a tíhovém zrychlení (z něj a hmotnosti získáme tíhovou sílu). Pro velikost vztlakové síly použijeme vzoreček $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho_{\mathrm{k}}g$. Aby loďka plavala, musí vztlaková síla vyrovnat sílu tíhovou, která na loďku působí a stahuje ji směrem dolů, takže platí $V\varrho_{\mathrm{k}}g = mg$. Hmotnost loďky zvyšujeme nákladem, který má unést; tíhové zrychlení ani hustotu vody nemáme totiž za běžných podmínek šanci výrazně ovlivnit. Takže jediný způsob, jak můžeme zvýšení hmotnosti vyrovnat, je zvýšit objem ponořené části lodičky. Čím objemnější bude ponořená část, tím více by měla loď uvést. S tím souvisí také hloubka ponoru loďky – čím je loďka užší, tím níž se musí ponořit, naopak loďce široké stačí klesnout méně. Nakonec potřebujeme brát v potaz také stabilitu lodičky. Měla by být souměrná a zátěž se musíme snažit rozkládat rovnoměrně, aby se loďka nepřevrátila.

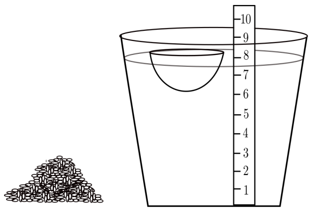
Nosnost loďky změříme tak, že do ní budeme postupně vkládat zátěž, dokud se nepotopí. Jakmile klesne ke dnu, vylovíme ji i s veškerou zátěží, odebereme část, po jejímž přidání se loď potopila, a zbylou zátěž zvážíme. Protože se mohlo stát, že jsme naměřili nižší nosnost kvůli neopatrnému vložení nebo vložení příliš těžké zátěže, tak měření několikrát opakujeme. Když potopenou loďku znovu položíme na hladinu, lehce se deformuje (někdy je také nutné opravit trhliny), tedy je možné, že ve druhém pokusu má větší nosnost než v prvním. V zadání se ptáme na nosnost nejvyšší, a tak uvedeme nejvyšší naměřenou hodnotu pro konkrétní model.

[8] nezapomeňte jej předtím zvážit

Hloubku ponoru změříme tak, že do průhledné nádoby uchytíme kolmo na hladinu vody pravítko, na kterém odečteme výšku hladiny a výšku nejnižšího bodu dna loďky. Rozdíl těchto hodnot je hloubka ponoru loďky. Můžeme si všimnout, že při zatěžování lodičky se nám se zvyšující se hloubkou ponoru zvedá hladina vody. O kolik se hladina zvedne však nemá na hloubku ponoru vliv. Vytlačenou kapalinu ve znění Archimédova zákona můžeme také interpretovat jako kapalinu v díře po tělese,[9] které bude stejně, ať je loďka v malé nádobě nebo ve velkém oceánu. V malé nádobě se vytlačená kapalina nemůže rozložit do nekonečna – hladina se viditelně zvedne; oceán je však tak velký, že ten objem vody, který loď vytlačí, na výšku hladiny nemá vliv. S trochou přehánění tedy můžeme říct, že díky zvedání hladiny by těžký tanker v jistém smyslu mohl plavat na 1 dl vody, pokud bychom ho rozprostřeli po celém jeho trupu.

Experiment

Pro měření použijeme průhlednou nádobu, do které připevníme pravítko, dále váleček plastelíny, který v našem případě vážil 7 g, kuchyňskou váhu a mokrou rýži jako zátěž. (Některá zrnka suché rýže plavou na vodě, tedy mají nižší hustotu než voda a pro dostatečné zatížení loďky bychom jich potřebovali více. Zároveň jsou však i v mokrém stavu dost malá na to, aby minimalizovala chybu měření, protože váží méně než gram, a kuchyňská váha váží s přesností právě na gramy. Tím, že zrnka předem namočíme, se také zbavíme velké nepřesnosti vzniklé tak, že původně suché zrnko po potopení nasaje vodu.)



Obr. 7: Schéma aparatury použité k měření. Je zde naznačeno pravítko k odečítání hloubky ponoru, jak jsme lodičky postupně zatěžovali rýží.

Měříme nosnost tří modelů – první je úzký s vysokou stěnou, protože by měl podle našeho předpokladu mít velkou hloubku ponoru; druhý široký, kterému by měla stačit stěna nižší; a třetí, který kombinuje vlastnosti obou předchozích, protože má přibližně tvar duté polokoule.

Měříme za pokojové teploty a snažíme se vyvarovat nežádoucích otřesů, které mohou vést k naplnění loďky vodou či jejímu převržení a předčasnému potopení, což značně ovlivní měření. Zároveň ze stejných důvodů zátěž pokládáme opatrně a rovnoměrně a snažíme se loďky nedotýkat, abychom ji nepotopili vlastní neopatrností. Když odečítáme hodnoty z pravítka, měli bychom se dívat kolmo na něj, protože při pohledu pod větším úhlem odečteme jinou hodnotu, než nám opravdu ukazuje. Nakonec musíme také dát pozor, abychom při vážení zátěže v nádobě[10] váhu vynulovali a nepřidávali tak k hmotnosti zátěže nepoužitou hmotnost vážicí nádoby.

[9] Tj. kapalinu, kterou bychom mohli vyplnit díru, která by po lodičce zbyla ve zcela zamrazené plné nádobě. Pokud bychom totiž loďku vložili do po okraj plné nádoby, do díry se vejde přesně ten objem, který přetekl,

Obr. 8: Tvary jednotlivých lodiček

	Model 1	Model 2	Model 3
Maximální naměřená nosnost (m)	71 g	84 g	122 g
Hloubka ponoru (h)	2,6 cm	1,7 cm	3,2 cm

Tab. 1: Naměřené hodnoty pro největší nosnosti

Nejistotu měření nemůžeme určit statisticky, protože měříme pouze jednu hodnotu. Uvedeme tedy systematickou nejistotu měřidla (naší kuchyňské váhy)[11] $u_m = 1\,\mathrm{g}$. Vyšší nejistotu v našem případě uvádět nemusíme, protože zrnko rýže se do nejistoty hmotností vejde. Kdybychom však přidávali těžší objekty, samotná nejistota měřidla by nestačila. Maximální hmotnost, kterou loďka unese, leží někde mezi hmotností zátěže před přidáním a po přidání předmětu, který ji potopil, tedy nejistota by byla zvolena podle hmotnosti tohoto předmětu.

Hloubku ponoru odečítáme z pravítka, které má dílky po milimetrech. Odečítáme z něj však dvě hodnoty, z nichž počítáme rozdíl, a zároveň dno loďky je od pravítka nezanedbatelně vzdálené, tedy úhel pod kterým se díváme, výrazněji ovlivní odečtenou hodnotu – proto zde bude nejistota vyšší než polovina nejmenšího dílku měřidla. Uvažujme odchylku maximální, tedy součet odchylek obou hodnot, což je $u_h = 1\,\mathrm{mm}$.

Závěr

Při měření jsme narazili hned na několik problémů. Aby měla loďka co největší objem, museli jsme jí vymodelovat co nejtenčí stěny. Tenké stěny pak velmi snadno praskaly. Drobnými trhlinami voda díky povrchovému napětí nepronikne, avšak po přidání rýže se trhliny mnohdy zvětší a loď klesá ke dnu. Zároveň se s mokrou plastelínou hůře pracuje, takže se nám nedařilo vyrobit loďku s téměř dokonale rovnými okraji a začalo do ní zatékat dříve, než celý její okraj klesl na úroveň hladiny. Hloubka ponoru se tedy nikdy nerovnala výšce loďky. První model se ukázal být velmi nestabilní. Rychle se naplnil až po okraj a přitom neklesl dostatečně pod hladinu, takže se téměř vždy převrátil a potopil před dosažením sedmdesáti gramů zátěže, ačkoliv jsme se snažili rozložením rýže převracení co nejvíce omezit. Jeho maximální naměřená nosnost byla $m_1 = (71 \pm 1)\,\mathrm{g}$ při hloubce ponoru $h_1 = (26 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Druhý model byl zase příliš široký a měl moc rovné dno, takže snadno praskal. Zároveň měl příliš nízký okraj na to, aby plaval s velkou zátěží. Pro něj jsme naměřili maximální nosnost $m_2 = (84 \pm 1)\,\mathrm{g}$ při hloubce ponoru $h_1 = (17 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Poslední model problémy obou předchozích řešil tím, že kombinoval

když jej loďka vytlačila.

[10] Tedy pokud nepokládáme přímo na váhu.

[11] U digitální váhy ji uvádí výrobce podle modelu.

jejich největší výhody, tedy dosáhl největší nosnosti a zároveň také největší hloubky ponoru. Nejvyšší naměřená nosnost plastelínové lodičky tedy byla $m_1 = (122 \pm 1)\,\mathrm{g}$ při hloubce ponoru $h_1 = (32 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Připomínáme, že celková hmotnost použité plastelíny byla ve všech případech jen $7\,\mathrm{g}$. Zjištěné poměry mezi nosností a původní hmotností nejsou neobvyklé ani pro skutečné velké lodě. Největší ropné tankery mohou také při vlastní hmotnosti 80 tisíc tun převážet přes 500 tisíc tun nákladu.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.V ... LHC

7 bodů; (chybí statistiky)

Na největším světovém urychlovači, LHC, o obvodu $27\,\mathrm{km}$ *mají letící protony energii až* $7\,\mathrm{TeV}$.

1. *Tyto protony se v LHC pohybují až* $99{,}95\,\%$ *rychlosti světla. Kolikrát za sekundu jeden takový proton oběhne celý obvod urychlovače?*

2. *Částice zde dosahují energie, která bývá srovnávána s energií letícího komára. Ověřte tuto paralelu a výpočtem odhadněte kinetickou energii komára v elektronvoltech. Potřebné údaje si dohledejte a nezapomeňte uvést zdroje.*

3. *Jakou de Brogliovu vlnovou délku mají protony v urychlovači a jakou náš komár? De Brogliova vlnová délka je něco jako vzdálenost, která udává, jak blízko se musíme na daný předmět dívat, aby se přestal chovat tak, jak očekáváme, tedy začala platit pravidla kvantové fyziky. Měli bychom tak použít kvantovou fyziku na fyzikální popis srážky dvou protonů? A srážky dvou komárů? Proč?*

   Poznámka: Pro hybnost protonu použijte vzorec plynoucí z relativity $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

1. Tato úloha slouží především k představě rychlostí, kterými se urychlený proton pohybuje. My známe jeho rychlost, která je $99{,}95\,\%$ rychlosti světla fixované na číselnou hodnotu $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a délku okruhu, která je $l = 27\,\mathrm{km}$. Uraženou dráhu tedy vypočítáme jako

   $$s = vt = 0{,}999\,5c \cdot 1\,\mathrm{s} \doteq 299\,642\,561{,}771\,\mathrm{m}\,.$$

   Protony tedy celý urychlovač obletí $n = s/l \doteq 11\,000$krát.

2. Dle Wikipedie[12] váží typický komár $m = 2\,\mathrm{mg} = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$ a dokáže létat rychlostí až $v = 2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při takovémto letu tedy dosahuje energie

   $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \doteq \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 \doteq 3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}\,.$$

   Nyní už nám zbývá jen převést tuto energii na elektronvolty, což je $E_k \doteq 1{,}93 \cdot 10^{12}\,\mathrm{eV} \doteq 2\,\mathrm{TeV}$. Částice v LHC tedy mají energii jako tři až čtyři letící komáři; mají tak řádově stejnou energii a příměr je opodstatněný.

[12] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kom%C3%A1rovit%C3%AD

3. Abychom mohli počítat de Brogliovu vlnovou délku, potřebujeme nejdříve znát hybnost tělesa. Hybnost komára spočítáme podle známého vzorce:

$$p_k = mv = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}56\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

přičemž jsme se nemuseli uchylovat k relativistické fyzice, neboť komárova rychlost se zdaleka neblíží k rychlosti světla. Nyní jeho hybnost dosadíme do vzorce pro de Brogliovu vlnovou délku z Výfučtení.

$$\lambda_k = \frac{h}{p} = \frac{6{,}636 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}}{1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 6 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{m}\,.$$

Vlnová délka komára je tedy řádově 10^{-28} m. Je o mnoho řádů menší, než vlnová délka detekovatelná dnešními technologiemi[13] i než komár samotný, proto komára můžeme bez problémů považovat za pevný objekt a počítat s ním podle pravidel klasické fyziky.

Nyní se tedy podíváme na vlnovou délku protonu. Jeho hybnost spočítáme pomocí relativistického vztahu ze zadání (a musíme tak použít relativitu, neboť se rychlost blíží rychlosti světla). Když dosadíme za m hmotnost protonu a následně ostatní veličiny, obdržíme:

$$\begin{aligned} p_p &= \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c} \doteq \\ &\doteq \frac{\sqrt{(7 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})^2 - (1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2 \cdot (299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^4}}{299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq \\ &\doteq 3{,}74 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Nyní už zbývá jen dosadit do vzorce pro de Brogliovu vlnovou délku:

$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} \doteq \frac{6{,}636 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}}{3{,}74 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 1{,}77 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}\,.$$

Tato vlnová délka je o 4 řády menší než rozměr protonu, tedy k relativně přesnému popisu pohybu protonu potřebujeme kvantovou mechaniku. Je to podobné, jako kdybychom u člověka, jehož délka je cca 1 metr, chtěli rozeznat předměty o délce jedné desetiny milimetru. Nemluvě o tom, že při srážce s protonem vzniknou ještě menší částice.

Kateřina Rosická
`kackar@vyfuk.mff.cuni.cz`

[13] Atomové jádro má řádově velikost 10^{-15} m.

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.