Výfučtení: Dopplerův jev

Historie

Christian Doppler byl rakouský fyzik narozený v Salzburgu roku 1803. Po střední škole zde také začal studovat filozofii, poté se ale přesunul na *polytechnický institut Vídeň* (dnes pojmenován *Technická univerzita Vídeň*), kde se roku 1829 stal asistentem matematiky u profesora Adama Burga. Následně začal pracovat na Českém vysokém učení technickém v Praze.

V roce 1842, ve věku 38 let, vydal své dílo *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels*, kde popisuje jev vymykající se selskému rozumu: barva světla vzdálených hvězd, které pozorujeme, závisí nejen na charakteristikách hvězdy samotné (např. její velikosti), nýbrž i na tom, jak rychle se k nám přibližuje, nebo vzdaluje.

Závislost na rychlosti je přitom na první pohled neintuitivní. Představte si třeba jednu hvězdu, která se od Země nevzdaluje, a pak druhou, stejnou, která se od Země vzdaluje. V okamžiku, kdy se obě hvězdy míjí (nejen tehdy) a jsou vedle sebe, bychom podle Dopplera měli vidět, že obě mají jinou barvu!

Tento Dopplerův jev tak opět naráží na podobný paradox jako tzv. *Zenónův paradox letícího šípu*, a to o téměř dva tisíce let později. Vzhledem k experimentálnímu potvrzení Dopplerova jevu tak můžeme opět o něco určitěji tvrdit, že fyzikální stav věcí záleží i na rychlosti a ne jen na poloze.

Nezávisle na Dopplerovi studoval tento jev i francouzský[1] fyzik Hippolyte Fizeau, jenž se zasloužil o jeho popsání za pomoci světla a opravil několik chyb v Dopplerově teorii. Vyjádřil Dopplerův jev matematicky a v roce 1848 poprvé objevil změnu frekvence při vzájemném pohybu dvou těles, čímž i položil základy dnešním jevům pozorovaným hlavně v astronomii – rudému a modrému posuvu.

Vlnění

Pro pochopení Dopplerova jevu potřebujeme nejdříve vědět, co to je vlnění, na které má Dopplerův efekt dopad. Řekněme si proto více o základech popisu kmitavého pohybu a vln.

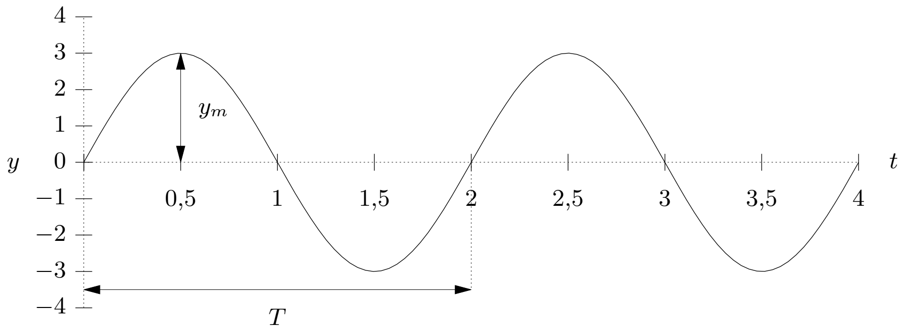
Fyzikálně můžeme vlnění popsat jako narušení nějakého prostředí (média), kdy se částice v něm začnou pohybovat. Pokud pozorujeme pohyby částic s odstupem, všimneme si, že se vytvořila vlna, která se v prostředí šíří. Nejlépe si můžeme tento jev, který jsme zatím vysvětlili dosti abstraktně, představit na situaci, kdy hodíme kámen do vody. Kámen rozruší vodní hladinu, čímž se začne do všech směrů šířit její výchylka, které říkáme vlna. Vodní hladina bude na některých místech výš a na jiných zase níž než ve své obvyklé výšce. Pokud se podíváme na jedno její místo, budeme pozorovat, že se periodicky (pravidelně dokola) pohybuje nahoru a dolů. Bude takzvaně *kmitat* okolo své původní polohy.

Obecněji, kmitání je periodická změna nějaké veličiny, vlnění je šíření této změny v prostoru a vlna je v prostoru cestující změna. Vlnu popisujeme pomocí několika veličin. Mezi ně patří její frekvence f, perioda T, vlnová délka λ nebo například rychlost šíření v. Tyto veličiny si nyní vysvětlíme. Při popisu budeme mluvit o mechanické vlně, která vznikla vhozením oblázku do jezera.

[1] Ve francouzštině se proto můžete setkat s označením *Doppler-Fizeau effect*.

Zaměřme se na jeden bod na hladině vody. Hladina vody se nepohybuje dopředu, nýbrž pouze nahoru a dolů (všechny body hladiny se tedy pohybují), takže dopředu se šíří jen vlna. Jeden bod na hladině tak kmitá okolo své výchozí polohy. Jeho umístění vyjadřujeme pomocí svislé osy y, kdy se vychyluje o nějakou hodnotu Δy od své původní. Položíme-li si původní hodnotu výšky do $y = 0$, bude se Δy pohybovat mezi maximálními výchylkami $-y_m$ a y_m. Výchylku[2] y_m, $[y_m] = \mathrm{m}$ (jestliže vložíme veličinu do hranarých závorek „[]“, chceme tím vyjádřit, její jednotku; kupříkladu pokud bychom chtěli říci, že čas t má jednotku s, zapíšeme to jako $[t] = \mathrm{s}$) značíme jako amplitudu vlny.

Pokud se budeme na tento bod nějakou dobu soustředit, uvidíme, že se vždy vrátí do své původní polohy a začne celý pohyb (kmit) znovu. Čas, který uběhne, než se bod v maximu vrátí do své původní polohy, nazýváme periodou T, $[T] = \mathrm{s}$ daného vlnění. Závislost polohy na čase je vyjádřena grafem 1.



Obr. 1: Graf polohy bodu v čase.

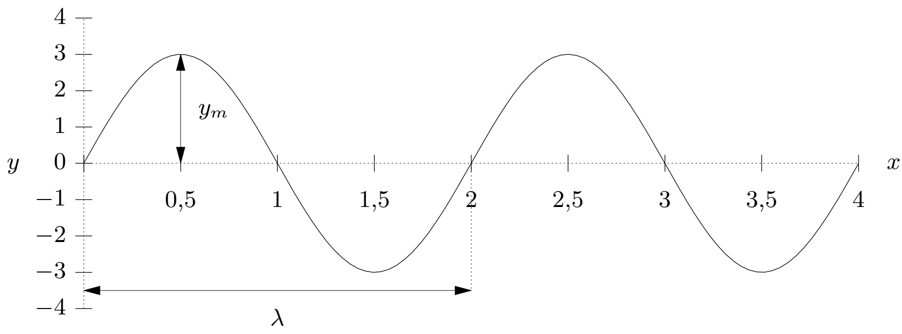
Podívejme se nyní na vlnu jako celek a řekněme, že se naše vlna šíří podél nějaké osy x, přičemž zdroj vlnění se nachází v $x = 0$. Víme, že vlna šířící se od kamene bude mít někde své vyšší a nižší body. Pokud zastavíme vlnu v čase a podíváme se na ni, zjistíme, že poloha y jednotlivých bodů je vlastně závislá na vzdálenosti x od zdroje (kamene). Tato závislost je zakreslena v grafu 2. Vzdálenost dvou bodů, které jsou ve stejné výšce, je vyjádřena veličinou λ, $[\lambda] = \mathrm{m}$ nazývanou *vlnová délka*.

Někdo by mohl namítat, že přeci body v $x = 0\,\mathrm{m}$, $x = 1\,\mathrm{m}$, a $x = 2\,\mathrm{m}$ mají všechny stejnou hodnotu $y = 0$, takže by vlnová délka měla být mezi body $x = 0\,\mathrm{m}$ a $x = 1\,\mathrm{m}$. Ovšem musíme si uvědomit, že bod musí také následovat stejnou polohu. Graf v $x = 0\,\mathrm{m}$ bude pokračovat nahoru, kdežto v $x = 1\,\mathrm{m}$ bude pokračovat dolů. Z toho vyplývá, že vlnová délka bude $\lambda = 2\,\mathrm{m}$.

Pokud si chcete hledání v grafech ještě zjednodušit, nebo si nejste jistí, které dva body byste měli v grafu 1 i 2 spojit, zaměřte se na maxima či minima, neboli na ta místa, kde je graf nejvíce nahoře nebo dole.

Vlny mohou být také popsány pomocí jejich frekvence f. Frekvence vyjadřuje, kolikrát se jeden kmit uskuteční za jednotku času. Protože víme, jak dlouho trvá jeden kmit, můžeme určit

[2] Některé druhy vlnění nemají amplitudu v metrech, neboť vlnění může být výchylka čehokoliv.



Obr. 2: Graf polohy více bodů podél osy x v jeden časový okamžik.

i frekvenci. Ta bude rovna převrácené hodnotě periody.

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

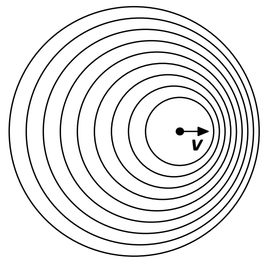
Jednotkou frekvence je hertz (Hz, $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$).

Vzhledem k tomu, že známe vzdálenost λ mezi stejnými stavy vlny i dobu T, kterou trvá, než se bod opět dostane do tohoto stavu, můžeme vypočítat rychlost šíření vlny

$$v = \frac{\lambda}{T}\,. \tag{2}$$

Dopplerův jev

Možná jste si někdy všimli, že když kolem vás projíždí auto záchranné služby, slyšíte vyšší tón sirény, když k vám přijíždí, než když odjíždí – pozorovali jste v praxi Dopplerův jev. O tomto jevu Doppler teoretizoval a v roce 1845 se Buys Ballot pokusil o jeho živou ukázku. V té době ovšem nebylo moc věcí, které dokázaly dosáhnout takových rychlostí, aby byl jev patrný. Naštěstí tehdejší vlaky toho schopné byly. A tak Ballot uspořádal akci, při které vzal dvě skupiny trumpetistů. Jednu usadil do vlaku a druhou nechal na nástupišti. Obě skupiny hrály stejný tón, ovšem trénovaní muzikanti slyšeli, že při příjezdu vlaku zněli hráči v něm výš než hráči na nástupišti. Naopak při odjezdu všichni slyšeli hráče uvnitř vlaku níže oproti těm na nástupišti (to mohli poznat bez přístrojů díky hudebnímu sluchu). Tím se v tehdejší době experimentálně potvrdil Dopplerův teoretický předpoklad.



Obr. 3: Znázornění vln při pohybu vysílače.

Nyní k vysvětlení tohoto jevu. Mějme těleso, které vysílá nějaké vlnění (zvuk, světlo či jiné), a druhé těleso, které vlnění naopak přijímá. Tato dvě tělesa si můžeme označit jako vysílač a přijímač. Dopplerův jev poté vzniká, jestliže se jedno nebo obě tělesa pohybují vůči sobě. Pokud následně budeme pozorovat vlnění jakožto přijímač, všimneme si, že vlnění změnilo svoji frekvenci oproti původní, kterou bylo vysíláno.

Pro jednoduchost si představme, že někde stojíte s kamarádem a kamarád na vás hází například tenisové míčky s konstantní frekvencí (např. jeden míček za sekundu). Pokud se ovšem váš kamarád začne pohybovat směrem k vám, všimnete si, že míčky k vám létají častěji (s vyšší frekvencí) než předtím, i když je kamarád hází stále stejně často, neboť míčkům stačí urazit menší a menší vzdálenost, což jim trvá kratší čas. Podobný efekt můžete zpozorovat, pokud se od vás kamarád začne vzdalovat. V takovém případě uvidíte, že míčky k vám létají o něco méně často (s menší frekvencí), než kdyby stál na místě.

Stejně tak platí, že pokud se my, jako přijímač, budeme pohybovat od zdroje, bude pozorovaná frekvence nižší a naopak při pohybu ke zdroji zpozorujeme vyšší frekvenci.

Změna frekvence nastává kvůli pohybu těles. Pohybující se těleso jakoby „dohánělo“ vlny, které dříve vyslalo ve směru pohybu, a tím je tlačí k sobě. Naopak „odbíhá“ od vln proti směru pohybu, čímž prodlužuje jejich vlnovou délku a snižuje jejich frekvenci. Celá analogie je vidět na obrázku 3.

Symetrie

Možná se ptáte, jestli záleží na tom, jestli se hýbe vysílač, nebo přijímač a sami sobě odpovídáte, že ne. Naopak na tom záleží – v obou případech bude Dopplerův jev trochu jiný. Proč? Nemělo by přeci jít o relativní rychlost obou? Odpověď si zkuste rozmyslet sami, než ji v příštím odstavci prozradíme. Jde o zajímavý myšlenkový experiment.

Důvodem absence symetrie je to, že oba případy jsou ze základu odlišné. Při pohybu zdroje se hýbe jen samotný zdroj, což je stejné, jako kdyby vlny cestovaly rychleji. Na druhou stranu, když se hýbe vysílač, tak se vlny nezrychlí, jen se změní jejich vlnová délka.

Pokud nastanou oba způsoby pohybu najednou, je důležité rozlišovat mezi oběma rychlostmi. Zavádíme tak rychlosti zdroje a přijímače vůči nehybnému médiu (nebo prostředí či vztažné soustavě, chcete-li). Ve většině případů je to rychlost vůči zemi.

Myšlenky v tomto odstavci vám snad pomohou k pochopení Dopplerova jevu. Na následujících řádcích se pustíme do odvození přesného matematického popisu. Může se to zdát jako těžký úkol, nicméně k němu vedoucí myšlenky jsme již v zásadě provedli.

Vzorec Dopplerova efektu

Při řešení podobných problémů často nepočítáme s vlnou jako s celkem, nýbrž pouze s jedním bodem na vlně (fází vlny), protože od nich se odvíjí perioda, frekvence i vlnová délka vlny (když známe maximum a víme, že je to maximum, dokážeme pak nakreslit celou vlnu). Proto si označme maximum vlny ($y = y_m$) jako naši fázi, kterou budeme popisovat. Konkrétně se budeme zabývat tím, jak daleko jsou tyto vrcholy od sebe vzdáleny, jak dlouhá je doba, kdy se k nám dostanou dva vrcholy, a kolikrát za sekundu se k nám dostanou.

Celou tuto situaci si můžeme popsat na příkladu dvou kamarádů s míčky, kdy každý míček označuje právě jednu fázi.

Pohyb přijímače Začněme situací, kdy je zdroj vlnění v klidu a přijímač se pohybuje. Přijímač má nějakou rychlost v_p, kterou se pohybuje vůči vysílači.

Příklad: Váš kamarád stojí naproti vám a hází na vás míčky. Když k němu půjdete rychlostí v_p, půjdete míčkům naproti. Chceme zjistit, o jak moc se změní čas T mezi dvěma chytnutími míčků po sobě v závislosti na rychlosti.

Když se pohybuje přijímač ke zdroji vlnění, jde v podstatě vlnám „naproti“. To znamená, že pro výslednou rychlost vlny v_c, se kterou se vůči nám bude pohybovat, bude platit $v_c = v \pm v_p$. Rychlost v je původní rychlost vlny a v_p je rychlost přijímače. Tu přičítáme, jestliže se přibližujeme ke zdroji. Při vzdalování ji naopak odečítáme.

Z rovnice (2) si můžeme odvodit, že pro periodu platí vztah $T = \lambda/v$. Po převedení vztahu do naší situace dostaneme $T = \lambda_0/v_c$, kde T je perioda z pohledu přijímače a λ_0 je původní vlnová délka vlny. Pokud zde použijeme předešlou rovnici pro v_c a použijeme vztah pro frekvenci, dostaneme rovnost

$$T = \frac{\lambda_0}{v \pm v_p} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v \pm v_p}{\lambda_0} \,.$$

Vlnovou délku λ_0 si můžeme odvodit z rovnice (2):

$$\lambda_0 = vT_0 \,,$$

přičemž T_0 je původní perioda vlny.

Kombinací těchto dvou vztahů dostáváme rovnici

$$f = \frac{v \pm v_p}{vT_0} \,,$$
$$f = f_0 \frac{v \pm v_p}{v} \,,$$

kde f_0 vyjadřuje původní frekvenci vlny.

Pohyb vysílače Pokud se vlny šíří volně do prostoru, mají tvar kružnice, která má střed v místě vypuštění vlny. To znamená, že pokud se bude zdroj pohybovat, bude se měnit i místo vypuštění vlny, čímž se bude měnit vlnová délka vlnění. Tato situace je znázorněna na obrázku 3.

Příklad: Kamarád se při házení míčku k vám začne přibližovat. Mezi každým vyhozeným míčkem překoná nějakou vzdálenost, kterou míček již nemusí urazit ve vzduchu, a tak nebude jeho let k nám tak dlouho trvat. Tím se zvedne frekvence míčků, kterou je chytáme.

Představte si nyní, že jste tak daleko od kamaráda, že je najednou více míčků ve vzduchu. Vlnovou délku takového vlnění, když kamarád-vysílač stojí, si označme λ_0. Když vysílač začne chodit, tak mezi dvěma hody ujde určitou vzdálenost, kterou si nazveme $\Delta\lambda$. O tuto vzdálenost bude vlnová délka vlnění (rozestup mezi míčky) kratší.

Ona změna vzdálenosti míčků, neboli u nás změna vlnové délky $\Delta\lambda$ bude opět vycházet z jednoduchého vztahu pro dráhu $s = vt$. Bude proto rovna součinu rychlosti vysílače v_v a periody vlnění T, neboli platí

$$\Delta\lambda = v_v T_0 \,,$$

kde f_0 je základní frekvence vlnění.

Při pohybu k přijímači se budou vlny dostávat blíže k sobě, z čehož můžeme usoudit, že budeme změnu vlnové délky $\Delta\lambda$ odčítat od původní vlnové délky λ_0. V opačném případě budeme $\Delta\lambda$ přičítat.

$$\lambda = \lambda_0 \mp \Delta\lambda = \lambda_0 \mp v_v T_0$$

Původní vlnovou délku si vyjádříme jako $\lambda_0 = vT_0$ z rovnice 2. Díky tomuto vyjádření můžeme předchozí vztah upravit do tvaru

$$\lambda = vT_0 - v_v T_0 = T_0(v - v_v) = \frac{v - v_v}{f_0} \,.$$

Nakonec při použití rovnosti $f = v/\lambda$ můžeme vyjádřit konečný vztah pro tuto situaci.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{v - v_v}{f_0}} = f_0 \frac{v}{v \mp v_v}$$

Pohyb přijímače i vysílače Pro rozdíl frekvence při pohybu jak přijímače, tak vysílače, musíme rozdíly frekvencí mezi sebou vynásobit, což nám dává rovnici

$$f = f_0 \cdot \left(\frac{v \pm v_p}{v}\right) \cdot \left(\frac{v}{v \mp v_v}\right) = f_0 \cdot \frac{v \pm v_p}{v \mp v_v},$$

kde
- v je rychlost vlnění v nějakém médiu,
- v_p vyjadřuje rychlost přijímače vzhledem k médiu a
- v_s představuje rychlost zdroje vzhledem k médiu.

Pokud se přijímač nebo vysílač pohybují k tomu druhému, bude u znamének rychlostí první možnost, v případě pohybu od sebe použijeme možnost druhou.

Využití

Dopplerův efekt lze popsat a spočítat relativně jednoduše, jak jste se mohli přesvědčit, nachází využití v mnoha klíčových odvětvích lidské vědy a techniky. Zde uvedeme jen některé z nich.

Astronomie

Dopplerův jev je v astronomii používán pro zjištění frekvenčního posuvu elektromagnetického záření, které hvězdy vydávají. Hvězdy vydávají záření o specifických vlnových délkách, které závisí na chemických prvcích nacházejících se ve hvězdě. Spektra pro jednotlivé prvky jsou známa, proto můžeme naměřené a referenční (pozemské) spektrum porovnat a určit, zda se jedná o rudý (vzdalování hvězdy), nebo modrý (přibližování) posuv.

Radary

Jev se také používá v některých typech radarů pro měření rychlosti vozidel. Radar vyšle paprsek na vozidlo, od kterého se paprsek odrazí a vrátí se zpět na čidlo radaru. Pomocí rozdílů frekvencí jsme následně schopni spočítat rychlost vozidla.

Lokalizační systémy

V lokalizačních a pozičních systémech má Dopplerův jev široké využití, kdy se s jeho pomocí určují překážky a relativní rychlost, kterou se přibližují. Použití nacházíme například u ponorek, kdy dvě ponorky mohou za pomoci vysílání signálů určit svoji polohu a rychlost, nebo u robotů, kteří se potřebují orientovat v prostoru.

V přírodě je Dopplerův jev využíván u zvířat s echolokací (netopýři, delfíni…) pro detekci překážek bez použití zraku.

Závěr

Dopplerův jev je velice zajímavý i užitečný jev, který je používán v mnoha odvětvích fyziky i obyčejného života. Popisuje změnu vlnové délky, resp. frekvence při vzájemném přibližování či vzdalování dvou objektů, z nichž jeden vysílá nějaký typ vlnění a druhý jej přijímá. Představili jsme si jeho podstatu a jeho odvození. Snad již tedy nebudete zaskočeni, až kolemjedoucí muzikanti budou hrát falešně!

Jindřich Dušek
jindra@vyfuk.mff.cuni.cz

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.