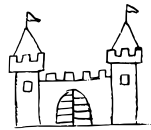


Úloha I.2 ... Prohlídka hradu

5 bodů; (chybí statistiky)

Organizátoři Výfuku si o prázdninách přivydělávají jako průvodci na hradě, kde jsou 3 různě dlouhé prohlídkové trasy a každou provází jiný průvodce. Julča má trasu dlouhou 30 minut, Marťa 40 minut a Kája 45 minut. Ráno začínají všechny tři provázet v 9 hodin u brány. V kolik hodin se všechny opět potkají u brány, jestliže návštěvníky provázejí nepřetržitě celý den?



Nejdříve si můžeme představit časovou osu a časy na ní podle toho, jak organizátorky provádí své trasy. Jako první bude mít hotovo Julča, musela by ale čekat 10 min na Martu, a tudíž bude pokračovat. My hledáme takový čas, ve kterém všechny tři organizátorky ukončí svoji prohlídku současně. Můžeme tedy jednotlivé časy skládat na časovou osu, dokud všechny tři celkové intervaly nebudou stejné. K tomu se v matematice využívá nejmenší společný násobek (NSN) těchto tří čísel. Ten se nám hodí, protože nám dokáže říci, jak musíme zkombinovat různá čísla tak, abychom z nich dostali co nejmenší číslo, které je možné získat znásobováním jejich společných částí. Proto si jednotlivé časy rozložíme na prvočísla:

$$t_J = 30 \text{ min} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ min}$$

$$t_M = 40 \text{ min} = 2^3 \cdot 5 \text{ min}$$

$$t_K = 45 \text{ min} = 3^2 \cdot 5 \text{ min}$$

NSN se skládá následovně – z daných čísel vytvoříme součin největších mocnin od každého čísla. V našem příkladě by to tedy vypadalo:

$$t_{\text{NSN}}(t_J; t_M; t_K) = t_{\text{NSN}}(30; 40; 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ min} = 360 \text{ min}$$

Nejkratší čas, po kterém se tři organizátorky sejdou, je 6 hodin. Julča, Marťa a Kája se střetnou zase u brány až v 15:00.

Můžeme se ujistit, že každá z provázejících stihla udělat celočíselný počet prohlídek – kdyby ne, tak by naše řešení nebylo správné.

Julča má trasu 30 min, stihne tedy udělat $360/30 = 12$ prohlídek. Marťa se čtyřicetiminutovou trasou stihne udělat $360/40 = 9$ prohlídek a Kája s trasou délky 45 min pak $360/45 = 8$ prohlídek.

Počty prohlídek nám vyšly celočíselně, což znamená, že naše řešení je správné. Můžeme si také všimnout, že tyto počty nemají společného dělitele – kdyby měly, holky by se potkaly už předtím.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.