



## Zadání VI. série

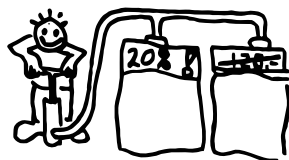


Termín odeslání: 10. 6. 2019 20.00

### Úloha VI.1 ... Money, Money, Money ⑥ ⑦

5 bodů

Bětka ráda nakupuje ve slevě, ale ty jsou jen vzácně. Pravidelně do kanceláře přikupuje 20 g spon do sešivačky za 15 Kč, 100 listů papíru za 70 Kč, a 200 g kávy za 150 Kč. Dnes má šťastný den, protože papír má slevu 10 % a káva 15 %. Kolikrát může zvětšit svůj nákup při zachování poměru mezi množstvím jednotlivých věcí, aby se vešla do stále stejně střídmeho rozpočtu? Kolik kusů pak bude od každé položky?



### Úloha VI.2 ... Na zahradě krtek vrtá... ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Ve městě Glasgow mají jako dopravní systém metro, které jezdí po kruhové trase a říkají mu poeticky Clockwork Orange. Dříve, než se vůbec postavilo, bylo potřeba propočítat pár údajů, aby bylo jasné, zda by se tato investice vyplatila. Ve zjednodušené verzi vyřešíme obdobný problém.

Metro by jezdilo jedním směrem po kruhové trase, kde by po každém kilometru byla umístěna jedna zastávka, kterých by bylo celkem 15. Jedna souprava by projela celý okruh za 30 minut a její kapacita by byla 50 lidí. V dopravní špičce na každou zastávku by přišel jeden člověk každých třicet sekund a dá se předpokládat, že na každé zastávce, kterou by souprava projela, by do ní nastoupili všichni lidé, kteří by se tam vešli, a pouze čtyři by vystoupili. Klasicky, jak je v metru zvykem, se nejdříve vystupuje, poté nastupuje. Čas na výstup a nástup lidí můžeme zanedbat<sup>1</sup>. Vedení města se ptá na tyto otázky:

1. Kolik nejméně souprav by muselo ve špičce jezdit, aby se na zastávkách nehromadili lidé (tj. aby celkový počet lidí na všech zastávkách neustále nerostl)?
2. Pokud bychom neměli dostatek souprav, po jak dlouhé trase by se jedna zaplnila, jezdila na okruhu sama a z první zastávky na začátku provozní doby by vyjízděla prázdná (tj. i všechny ostatní zastávky by ještě byly prázdné)?

### Úloha VI.3 ... Highway to Hell ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Dříve, než bude skrz Kuželový vrch, který má s dostatečnou přesností tvar kuželu, postaven nový tunel, má Jirka na výběr. Musí si vybrat, jestli jej při cestě z jedné strany na druhou objede po silnici obkružující jeho úpatí, nebo to vezme přímo do kopce a z kopce přes jeho vrchol. Vrch má výšku  $h$  a poloměr podstavy  $r$ . Palivo může Jirka ušetřit tím, že za vrcholem, který je v polovině cesty, vypne motor a sjede z kopce samospádem.

Jirkovi je jasné, že se mu přímá cesta vyplatí jen do určité maximální výšky  $h$ . Pomozte mu ji najít, když víte, že na ujetý kilometr spotřebuje zapnutý motor  $C$  mililitrů paliva a jeden

<sup>1</sup>I když v reálném životě jej rozhodně při plánování zanedbávat nemůžeme.

mililitr poskytne  $H$  joule energie Jirkově vozu o hmotnosti  $m$ . Zajímá nás tedy, jakou výšku  $h$  by kužel o poloměru podstavy  $r$  musel mít, aby Jirka spotřeboval stejné množství paliva na jeho objetí, a na jeho vyjetí nahoru a poté sjetí dolů?

*Návod:* práci výjezdu na kopec můžete uvažovat jako součet příspěvků jízdy po rovince pomyslné podstavy pod cestou + vytažení auta do odpovídající výšky.

*Bonus pro velmi náročné:* započítejte do výsledku přesné prodloužení trasy závislé na  $h$ .

## Úloha VI.4 ... Byl to ten slavný den... ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

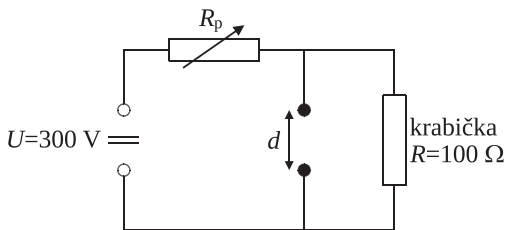
6 bodů

Z toho slavného dne, kdy byl do Julčiny vesnice zaveden elektrický proud, našla Julča ve sklepe záhadnou černou bakelitovou krabičku. Ta měla dva vývody na připojení ke zdroji a na sobě upozornění „ $I_{\max} = 1 \text{ A}$ ,  $R = 100 \Omega$ “. I když byla Julča moc zvědavá, co zařízení umí, chtěla si dát velký pozor, aby ho nepoškodila příliš velkým proudem. Neměla k dispozici mnoho kvalitních součástek, a proto musela improvizovat.

Aby mohla přímo regulovat proud procházející krabičkou, zapojila mezi ní a zdroj ( $U = 300 \text{ V}$ ) sériově reostat, což je zařízení, kterému lze měnit elektrický odpor. Jeho odpor si označme  $R_p$ .<sup>2</sup> Jak jsme ale již řekli – reostat je nekvalitní a kdyby se vše pokazilo, chtěla Julča omezit proud i shora, jenže žádnou funkční pojistku po ruce neměla, než dostala nápad!

K vyrobení pojistky jí stačí, když paralelně s krabičkou připojí přerušovaný drát s úzkou mezerou o délce  $d$ . Vzduch má průrazné napětí  $V \approx 20 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$ , což znamená, že pokud by bylo na 1 cm dlouhé mezeře napětí  $V \cdot d = 20 \text{ kV}$ , zapálil by se elektrický oblouk a mezerou by začal procházet proud. Pokud tedy tuto „bleskojistku“<sup>3</sup> zapojí paralelně s krabičkou, může její zapálení snížit (svést) nadměrný proud od krabičky.<sup>3</sup>

Jaký musí Julča na reostatu nastavit odpor, aby proud snížila na  $I_{\max}$ ? Jakou podmínku<sup>4</sup> musí splňovat délka  $d$ , pokud chceme, aby za těchto podmínek, tedy pokud reostat dobře funguje, procházel krabičkou jistě proud a pojistka se nespustila? Na obr. 1 je zapojení vyobrazeno.



Obr. 1: Julči zapojení.

## Úloha VI.5 ... Prší, prší, jen se leje ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

7 bodů

Jednoho dne se housenky zeptaly starého houseňáka, proč na ně občas tak nepříjemně prší. Ten jim o tom uspořádal podrobnou přednášku a jako správný učitel se je rozhodl nakonec

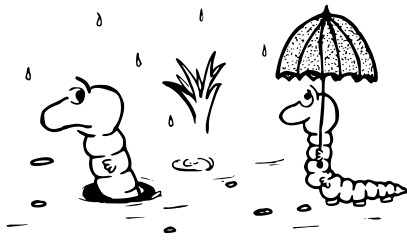
<sup>2</sup>Index  $p$  od slova „předřazený“, které se v elektrotechnice často používá.

<sup>3</sup>Samozřejmě má oblouk samotný také daný odpor, ale u něj můžeme jen předpokládat, že je dostatečně malý, aby jistojistě snížil  $I$  pod  $I_{\max}$ .

<sup>4</sup>vyjádřenou nerovnicí

otestovat...

Představte si, že stejně jako naše housenky žijete v lese, který má rozlohu  $3 \text{ km}^2$ . Jednoho dne v celém lese naprší 10 mm srážek při teplotě  $15^\circ\text{C}$ . Objemem mraku označujeme ostře ohraničený objem homogenní směsi vodní páry a vzduchu, se kterým budeme počítat.



1. Aby  $15^\circ\text{C}$  bylo za atmosférického tlaku tzv. rosným bodem, tj. maximální teplotou, při které vodní pára o dané koncentraci (absolutní vlhkosti  $\Phi$  v  $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ ) kondenzuje, musí jí být ve vzduchu alespoň  $\Phi = 12,83 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}$ . Jaký musel být maximální objem mraku, který při místní teplotě zkondenzoval, a tedy se vypršel?
2. Kondenzace vodní páry uvolňuje do vzduchu obrovské množství skupenského tepla, proto je před bouřkou teplo. O kolik by se ohřál kondenzací výše vzduch v mraku, pokud bychom mu nedovolili se ochlazovat do okolí?<sup>5</sup>
3. Jaká by musela být boční rychlost unášivého větru, aby kapky, padající rovnoměrně ze střední výšky 300 m, minuly náš les o šířce 1 km? Pro odpor pohybu ve vzduchu je možno použít Newtonova vzorce  $F_o = (1/2) \cdot C \cdot \rho \cdot S \cdot v^2$ , kde  $v$  je svislá pádová rychlost,  $\rho$  je hustota vzduchu a  $C = 0,5$  je odporový koeficient kulových kapek o poloměru 1 mm a kruhovém průřezu  $S$ .

Potřebné hustoty a skupenská tepla si vyhledejte.

## Úloha VI.E ... Jumpin' Jack ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Snad každý si někdy hrál se skákacím míčkem, kterému říkáme hopík. Hopík se dokáže odrazit nepředstavitelným způsobem a odskočit do neznáma, musí ale skákat na vhodném povrchu. Možnou míru toho, jak moc se hopík odráží, je tzv. koeficient restituce, který si označíme  $k$ . Ten vyjadřuje, kolik energie si míček zachová při jednom odrazu. Jelikož je potenciální energie přímo úměrná výšce, lze koeficient restituce počítat jako  $k = h_{n+1}/h_n$ , kde  $h_n$  je maximální výška, do které míček vyskočí po jednom odrazu. Změřte, jaký je koeficient restituce hopíku, který si obstaráte, na alespoň třech různých (různě tvrdých) površích.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>V reálném světě by se pak samozřejmě nemohl vypršet, protože by teplota byla zase vysoko nad rosným bodem.

<sup>6</sup>Jedna z efektivních metod je pomocí natočení skákajícího hopíku na video a jeho následná analýza. Na tu existují pokročilé volně dostupné softwary jako Tracker (<https://physlets.org/tracker/>), ale lze si vystačit i s přehrávačem videa jako VLC (<https://www.videolan.org/index.cs.html>).

## Úloha VI.C ... Daddy Cool ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Pepa si v pokoji nedopatřením položil zmrzlinu na zapnuté ústřední topení. Jednalo se o Ruskou zmrzlinu ve tvaru kvádrů s hranami  $2 \times 4 \times 6$  cm obloženého oplatkami, každou o dodatečně tloušťce 0,25 cm.

1. Jestliže voda v topení má teplotu  $50^\circ\text{C}$  a zmrzlina  $0^\circ\text{C}$ , popište nerovnostmi vztahy mezi teplotami ve všech zmíněných oblastech vody v topení, ocelové stěny topení, zmrzliny, oplatek, a k tomu i okolního vzduchu před a po roztečení zmrzliny.
2. Jaké je skupenské teplo tání  $L$  zmrzliny?<sup>7</sup> Zmrzlina je našlehaná, a tak ji můžeme uvažovat jako 60 % směs ledu se vzduchem (tepelnou kapacitu vzduchu v celé úloze zanedbáváme).
3. Výsledek tohoto fyzikálního děje si jistě umíte představit. Zkusme ale nyní spočítat, za jak dlouho ke katastrofě dojde. Topení má ocelovou stěnu tlustou 0,3 cm. Všechn led, který roztaje, ihned odteče. Děj se stane tak rychle, že vliv okolí je možno zanedbat. Oplatky slabě izolují, a tak je mezi stěnami té, na které zmrzlina leží, poloviční rozdíl teplot, než kdyby zmrzlina ležela přímo na topení.

Skupenské teplo tání vody je  $334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ , hustota ledu  $900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , součinitel tepelné vodivosti pro ocel je  $46 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a pro oplatku  $0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  (skutečně změřená hodnota!).

*Poznámka* Text seriálu naleznete na našem webu.



**Korespondenční seminář Výfuk  
UK, Matematicko-fyzikální fakulta  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8**

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>  
e-mail: [vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz](mailto:vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz)

Výfuk je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

---

<sup>7</sup>Měřeno v prostých  $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ .