

Úloha VI.C ... Daddy Cool

7 bodů; průměr 3,50; řešilo 10 studentů

Pepa si v pokoji nedopatřením položil zmrzlinu na zapnuté ústřední topení. Jednalo se o Ruskou zmrzlinu ve tvaru kvádrů s hranami $2 \times 4 \times 6$ cm obloženého oplatkami, každou o dodatečné tloušťce 0,25 cm.

1. Jestliže voda v topení má teplotu 50°C a zmrzlina 0°C , popište nerovnostmi vztahy mezi teplotami ve všech zmíněných oblastech vody v topení, ocelové stěny topení, zmrzliny, oplatek, a k tomu i okolního vzduchu před a po roztečení zmrzliny.
2. Jaké je skupenské teplo tání L zmrzliny?¹ Zmrzlina je našlehaná, a tak ji můžeme uvažovat jako 60% směs ledu se vzduchem (tepelnou kapacitu vzduchu v celé úloze zanedbáváme).
3. Výsledek tohoto fyzikálního děje si jistě umíte představit. Zkusme ale nyní spočítat, za jak dlouho ke katastrofě dojde. Topení má ocelovou stěnu tlustou 0,3 cm. Všechn led, který roztaje, ihned oteče. Děj se stane tak rychle, že vliv okolí je možno zanedbat. Oplatky slabě izolují, a tak je mezi stěnami té, na které zmrzlina leží, poloviční rozdíl teplot, než kdyby zmrzlina ležela přímo na topení.

Skupenské teplo tání vody je $334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, hustota ledu $900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, součinitel tepelné vodivosti pro ocel je $46 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a pro oplatku $0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (skutečně změřená hodnota!).

1. Nejprve si připomeňme, jakými pravidly se řídí termické vlastnosti látek. Látky se vždy snaží být v tepelné rovnováze, a když tomu tak není, předává teplejší těleso teplo chladnějšímu. Topení funguje právě na principu této nerovnováhy, kdy je do místnosti přivedena voda o vysoké teplotě, která předává teplo do okolí. Jedním z důvodů, proč se používá právě voda, je její vysoká měrná tepelná kapacita, tedy že ochlazením se o malý rozdíl teplot vydá oproti jiným látkám mnoho tepla. Voda v topení tedy bude mít určitě v obou případech nejvyšší teplotu z celé místnosti a bude předávat teplo chladnějším předmětům. Nejbližší předmět, kterému voda může předávat teplo jsou ocelové stěny topení. Jiného předmětu se voda nedotýká, a tak, pokud zanedbáme přenos tepla zářením, nemůže ani jinému předmětu přímo předávat energii. Další přenos tepla do místnosti je tedy výhradně od ocelového pláště topení, který tím pádem musí mít větší teplotu než zbytek místnosti. Další nerovnosti se již liší podle stavu zmrzliny, podívejme se tedy nejprve na stav s neroztátou zmrzlinou.

Když zmrzlina ještě neroztála, je celý její kvádr na teplotě blízké nule, což je rozhodně méně než teplota vzduchu v místnosti. Tím pádem je blok zmrzliny ohříván ze všech stran vzduchem i ocelovým topením, ale tepelný tok od topení je díky většímu rozdílu teplot mnohonásobně větší, tudíž teplota bude směrem od topení klesat. Výsledná nerovnost pro teploty tedy bude mít podobu

voda > ocelový plášť > vzduch > bližší oplatka > zmrzlina > vzdálenější oplatka.

Po roztečení bude mít zmrzlina již vyšší teplotu než 0°C a celý její blok bude v tepelné rovnováze, tedy bude mít přibližně stejnou teplotu. Zároveň bude zmrzlina neustále přijímat teplo od topení, které může odevzdávat pouze vzduchu (pokud by byl chladnější),

¹Měřeno v prostých $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$.

zatímco vzduch teplo přijímané od topení bude předávat i okolním stěnám, předmětům v místnosti a podobně, tedy bude jistě v ustáleném stavu chladnější než roztopená zmrzlina:

$$\text{voda} > \text{ocelový plášť} > \text{zmrzlina s oplatkami} > \text{vzduch.}$$

2. Nejprve si ujasníme rozdíl mezi skupenským teplem tání a *měrným* skupenským teplem tání. Skupenské teplo tání je teplo, které musíme danému tělesu dodat, aby roztálo, měrné skupenské teplo tání je pak toto teplo vztažené na jednotku hmotnosti. Jelikož je zmrzlina vytvořena z 60 % z ledu a tepelnou kapacitu i hustotu vzduchu zanedbáváme, bude měrné skupenské teplo tání (v $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$) stejné jako pro led, tedy $l = 334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Zajímavější pro nás bude skupenské teplo tání konkrétního bloku zmrzliny. Led tvoří jen 60 % objemu zmrzliny, tedy jeho hmotnost bude $m = 0,6\rho V$, z čehož už vypočítáme skupenské teplo tání

$$L = 0,6abc\rho l = 0,6 \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ m} \cdot 0,06 \text{ m} \cdot 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$L \doteq 8657 \text{ J.}$$

Skupenské teplo tání zmrzliny tedy je 8657 J.

3. Nejprve bychom se chtěli omluvit za nepřesné zadání této části úlohy, kde je informace o polovičním rozdílu teploty s oplatkou přebytečná a chybná. Z tohoto důvodu budeme ve vašich řešeních uznávat více možností, podle toho, jak jste danou úlohu pochopili. První možností je držet se oné věty zadání a uvažovat rozdíl teplot mezi stěnami spodní oplatky jen 25°C . Pak můžeme jednoduše vypočítat velikost tepelného toku skrze tuto oplatku

$$\dot{Q} = \lambda \frac{S}{d} \Delta t.$$

Aby zmrzlina roztála, je potřeba jí dodat právě její skupenské teplo tání, tedy $L = \dot{Q}\tau$. Z toho již snadno vyjádříme čas τ , za který všechna zmrzlina roztaje.

$$\tau = \frac{Ld}{\lambda S \Delta t}$$

$$\tau = \frac{8657 \text{ J} \cdot 0,0025 \text{ m}}{0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \cdot 0,06 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ m} \cdot 25^\circ\text{C}} \doteq 1804 \text{ s} \doteq 30 \text{ min}$$

Zmrzlina položená na topení tedy v našem přibližném modelu roztaje přibližně za půl hodiny.

Další možné řešení spočívá v ignorování informace o polovičním rozdílu teplot a kompletní výpočet situace, kdy teplo teče z topení o teplotě $t_0 = 50^\circ\text{C}$ nejprve ocelovým obalem a poté oplatkou tající zmrzliny o teplotě $t_2 = 0^\circ\text{C}$. V tomto případě musí být oba tepelné toky stejné, z čehož můžeme vyjádřit teplotu t_1 mezi oplatkou a topením.

$$\dot{Q}_{\text{ocel}} = \dot{Q}_{\text{oplatka}}$$

$$\lambda_1 \frac{S}{d_1} (t_0 - t_1) = \lambda_2 \frac{S}{d_2} (t_1 - t_0)$$

$$t_1 = \frac{\lambda_2 t_2 / d_2 + \lambda_1 t_0 / d_1}{\lambda_2 / d_2 + \lambda_1 / d_1}$$

$$t_1 \doteq 49,999\,998\,37^\circ\text{C}$$

Nyní dosadíme tento teplotní rozdíl do vzorce $2\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ z Výfučtení pro tepelný tok dvěma vrstvami a pomocí faktu, že tepelný tok je teplo, které proteče za jednotku času, vyjádříme čas τ , který trvá dodání skupenského tepla tání L .

$$\dot{Q} = \frac{\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2}{2}$$

$$\tau = \frac{2L}{\lambda_1 S (t_0 - t_1) / d_1 + \lambda_2 S (t_1 - t_0) / d_2} \doteq 15 \text{ min}$$

Po dosazení vypočtené teploty mezi oplatkou a obalem topení nám vyšel čas 15 minut, což je polovina času z předešlého případu. Tento výsledek je způsoben tím, že pokles teploty na oceli je velmi malý, a tudíž ho můžeme zanedbat a počítat pouze prostup tepla oplatkou o teplotním rozdílu přibližně 50°C , což je dvojnásobný rozdíl teplot, a tedy dvojnásobný tepelný tok než v předchozím případě.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.