

Úloha VI.E ... Jumpin' Jack

7 bodů; průměr 5,89; řešilo 9 studentů

Snad každý si někdy hrál se skákacím míčkem, kterému říkáme hopík. Hopík se dokáže odrazit nepředstavitelným způsobem a odskočit do neznáma, musí ale skákat na vhodném povrchu. Možnou míru toho, jak moc se hopík odráží, je tzv. koeficient restituice, který si označíme k . Ten vyjadřuje, kolik energie si míček zachová při jednom odrazu. Jelikož je potenciální energie přímo úměrná výšce, lze koeficient restituice spočítat jako $k = h_{n+1}/h_n$, kde h_n je maximální výška, do které míček vyskočí po jednom odrazu. Změřte, jaký je koeficient restituice hopíku, který si obstaráte, na alespoň třech různých (různě tvrdých) površích¹.

Teorie

Při vyzvednutí hopíku do výšky h mu dodáváme potenciální energii E_p . Jakmile ho pustíme, začíná míček zrychlovat a přeměňovat energii potenciální na energii kinetickou E_k . Těsně před dopadem bude E_k stejně velká jako E_p těsně po upuštění hopíku.

Při dopadu se začne hopík deformovat – zplošťovat a zároveň se část celkové energie přemění na vnitřní energii E_v , která se projeví zvýšením teploty hopíku a podložky, od které se odráží, a zvukovou vlnou nárazu. Po odrazu se míček zase vrátí do své původní kulaté podoby, ale tentokrát již s menší kinetickou energií E_{k1} , jež se projeví menší výškou výstupu h_1 . Tento cyklus se po každém pádu opakuje a hopík pokaždé vystoupá kratší vzdálenost. Zároveň proti pohybu míčku působí i odporová síla prostředí – vzduchu, ten však nesouvisí s povrchy, proto ho zanedbáváme.

Teď se můžeme zamyslet nad tím, proč na různých površích skáče hopík jinak. V základu jde o to, že každý materiál jinak odvádí energii při dopadu hopíku. Při dopadu na tvrdé nepohyblivé kachličky se bude míček dotýkat pouze na malé ploše a nemá kam předat energii, tudíž se většina energie přemění zpět na jeho kinetickou energii. Naproti tomu při pádu na huňatý koberec se energie hopíku může předávat i jinou cestou, jelikož se v průběhu dopadu dotkne několika vláken koberce, která postupně absorbují část energie padajícího hopíku. Zároveň koeficient restituice závisí na druhu koule, kterou pouštíme. Například kovová koule by se vůbec neodrazila, protože by se veškerá energie rovnou přeměnila na teplo či deformace podkladového materiálu – koule by mohla rozbit podlahu.

Experiment

Experiment se rozhodneme řešit pomocí doporučeného postupu. Nejdříve si zvolíme vhodný hopík a povrchy, pro něž budeme měřit koeficienty restituice. Dále si připravíme kameru a vhodné místo s dostatečným nasvícením.

Hopík vyzvedneme do výšky našeho těla a pustíme tak, aby neměl žádnou horizontální rychlost a padal pouze ve vertikálním směru. To se samozřejmě nikdy úplně přesně nepovede, nicméně činíme aproximaci, že tomu tak je. Pomocí kamery zachytíme jeho pohyb a nahrajeme do počítače, kde jej pomocí programu VLC zanalyzujeme. Zajímají nás vždy dvě polohy míčku – výška upuštění/výstupu a místo dopadu. Jednotlivé snímky, kde tyto pozice nastanou, uložíme. Následně je nahrajeme jako vrstvy do GIMP 2, označíme pozici míčku na jednotlivých snímcích

¹Jedna z efektivních metod je pomocí natočení skákajícího hopíku na video a jeho následná analýza. Na tu existují pokročilé volně dostupné softwary jako Tracker (<https://physlets.org/tracker/>), ale lze si vystačit i s přehrávačem videa jako VLC (<https://www.videolan.org/index.cs.html>).

a následně je proložíme do jednoho snímku. Poté můžeme jednoduše změřit jednotlivé výšky a jejich hodnoty zaznamenat.

Mohli bychom se zabývat převáděním délek v pixelech na délku v metrech, ale to naštěstí dělat nemusíme, protože nás zajímá poměr výšek, a tudíž rozměry výšek nejsou důležité, pokud jsou stejné – tzv. se vykrátí. Jednotlivé výšky po každém odrazu v rámci jednoho spuštění míčku můžeme zaokrouhlit na celé pixely a vynést do tabulky. Každé měření provedeme totiž tak, že nebudeme po každém spuštění sledovat pouze jeden výstup, ale do tabulky později zaneseme i hodnoty výšky každého dalšího odrazu. Tím pomocí jediného spuštění získáme hned několik hodnot koeficientu, z nichž můžeme sestavit přesnější výsledek.

povrch	h_0/px	k_0	h_1/px	k_1	h_2/px	k_2	h_3/px
koberec	542	0,65	354	0,63	222	0,61	135
kachličky	358	0,79	283	0,81	228	0,83	190
plouvoucí podlaha	453	0,68	309	0,74	229	0,76	174

povrch	k_3	h_4/px	k_4	h_5/px	$\langle k \rangle$	σ_k	u_k
koberec	0,60	81	0,63	51	0,624	0,009	1,5 %
kachličky	0,82	156	0,85	133	0,821	0,011	1,3 %
plouvoucí podlaha	0,75	131	0,73	96	0,734	0,014	1,9 %

Tab. 1: Výšky v pixelech v pěti různých spuštěních na třech různých materiálech

V tabulce můžeme vidět jednotlivé výšky výstupu míčku a vždy koeficient restituace, který náleží podílu mezi dvěma po sobě jdoucími hodnotami h_i ze dvou po sobě jdoucích odrazů. To znamená, že pro 5 odrazů samozřejmě dostáváme 4 různé hodnoty k_i . Na konci tabulky vpravo dole $\langle k \rangle$ označuje pravděpodobnou hodnotu koeficientu restituace a σ_k její směrodatnou odchylku. V posledním sloupečku je pak relativní odchylka u_k , neboli poměr směrodatné odchylky a pravděpodobné hodnoty, která slouží ke snazšímu porovnávání přesnosti jednotlivých měření. Při zkoumání výsledků nám může připadat zvláštní, že hodnota pixelů není stejná při úvodním puštění míčku, to je ale způsobeno různou vzdáleností, kterou jsme stáli od kamery nad různými povrchy, čímž se změní počet pixelů na metr. Ve výsledku jsou tyto hodnoty po převodu stejné, jelikož nás zase zajímá jenom poměr jednotlivých výšek.

Chyby měření

V průběhu experimentu musíme předpokládat, že jsme se dopustili různých nepřesností, a proto je výsledek zatížen chybou. Směrodatnou odchylku počítáme podle známého vzorce

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{(k_1 - \langle k \rangle)^2 + (k_2 - \langle k \rangle)^2 + \dots + (k_n - \langle k \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

který můžete najít v našem naučném textu Hokus Pokus², relativní odchylku jsme pak spočítali podle vzorce

$$u_k = \frac{\sigma_k}{\langle k \rangle}.$$

Chyby měření mohou být způsobeny několika faktory, ať již zmíněným odporem vzduchu, ale hlavně kvalitou nahraného videa, protože od něho se odvíjelo zpracování dat. Hlavní bylo rozlišení a snímková frekvence kamery, tyto dva faktory ovlivnily kvalitu nahraného videa. Rozlišení rozhodovalo o přesné poloze míčku ve hledaných polohách a frekvence o správné časové poloze míčku.

V experimentu jsme dále ignorovali i jeden důležitý fakt – koeficient restituce roste s nižší výškou. Jak se bude hopík odrážet níže, budou jeho odrazy efektivnější. Naštěstí se tento efekt výrazně projeví až při výšce nižší než 10 cm, tudíž pro nás je zanedbatelný. To si můžeme vyzkoušet sami, když míček pustíme z takto malé výšky na tvrdý povrch, uvidíme, že míček bude skákat skoro do stejné výšky.

Závěr

Naměřené koeficienty restituce jsou pro koberec ($0,624 \pm 0,009$), pro kachličky ($0,82 \pm 0,01$) a pro plovoucí podlahu ($0,73 \pm 0,01$). Výsledek experimentu není nikterak nový, jelikož už z běžné intuice bychom dokázali předpovědět, že míček bude skákat výše na pevných površích než na měkčích. Na druhou stranu je zajímavé porovnávat pevné povrchy a zjistit, na kterém bude hopík skákat nejvýše, a tudíž déle vydržel skákat, a my se nemuseli tolik nadřít s jeho zvedáním.

Patrik Kašpárek

patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²http://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus