Úloha VI.5 ... Prší, prší, jen se leje

7 bodů; průměr 4,46; řešilo 13 studentů

Jednoho dne se housenky zeptaly starého houseňáka, proč na ně občas tak nepříjemně prší. Ten jim o tom uspořádal podrobnou přednášku a jako správný učitel se je rozhodl nakonec otestovat...

Představte si, že stejně jako naše housenky žijete v lese, který má rozlohu $3\,\mathrm{km}^2$*. Jednoho dne v celém lese naprší* $10\,\mathrm{mm}$ *srážek při teplotě* $15\,^\circ\mathrm{C}$*. Objemem mraku označujme ostře ohraničený objem homogenní směsi vodní páry a vzduchu, se kterým budeme počítat.*

1. *Aby* $15\,^\circ\mathrm{C}$ *bylo za atmosférického tlaku tzv. rosným bodem, tj. maximální teplotou, při které vodní pára o dané koncentraci (absolutní vlhkosti* Φ *v* $\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$*) kondenzuje, musí jí být ve vzduchu alespoň* $\Phi = 12{,}83\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$*. Jaký musel být maximální objem mraku, který při místní teplotě zkondezoval, a tedy se vypršel?*

2. *Kondenzace vodní páry uvolňuje do vzduchu obrovské množství skupenského tepla, proto je před bouřkou teplo. O kolik by se ohřál kondenzací výše vzduch v mraku, pokud bychom mu nedovolili se ochlazovat do okolí?*[1]

3. *Jaká by musela být boční rychlost unášivého větru, aby kapky, padající rovnoměrně ze střední výšky* $300\,\mathrm{m}$*, minuly náš les o šířce* $1\,\mathrm{km}$*? Pro odpor pohybu ve vzduchu je možno použít Newtonova vzorce* $F_\mathrm{o} = (1/2)\cdot C\cdot \varrho\cdot S\cdot v^2$*, kde* v *je svislá pádová rychlost,* ϱ *je hustota vzduchu a* $C = 0{,}5$ *je odporový koeficient kulových kapek o poloměru* $1\,\mathrm{mm}$ *a kruhovém průřezu* S*.*

Potřebné hustoty a skupenská tepla si vyhledejte.

1. Abychom mohli zjistit, jaký objem bude mít mrak při dané vlhkosti, musíme nejdříve vědět, kolik vody vůbec naprší.

   Les považujeme za jednotvárný a pravidelný, proto si objem vody V_voda můžeme představit jako stejnorodou vrstvu s podstavou $S = 3\,\mathrm{km}^2 = 3\cdot 10^6\,\mathrm{m}^2$ a výškou $h = 10\,\mathrm{mm} = 10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Údaj o srážkách v milimetrech totiž vždy odpovídá výšce vodního sloupce, napršeného na $1\,\mathrm{m}^2$. Z těchto rozměrů není problém získat objem $V_\mathrm{voda} = Sh$. Vlhkost je udána v gramech na metr krychlový a značí, jaká hmotnost vody je v určitém objemu vzduchu. Proto potřebujeme znát hmotnost napršené vody. Tu vypočítáme pomocí hustoty vody jako $m_\mathrm{voda} = V_\mathrm{voda}\varrho = Sh\varrho_\mathrm{voda}$. Je důležité, abychom uvedli hustotu vody ve správných jednotkách. Objem vody máme v m^3 a hmotnost potřebujeme dostat v g, proto bude hustota vody $\varrho_\mathrm{voda} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 10^6\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$.

   Pro vlhkost platí vztah $\Phi = m/V$, proto bude pro objem mraků platit $V = m/\Phi$.

$$V_\mathrm{mrak} = \frac{m_\mathrm{voda}}{\Phi} = \frac{Sh\varrho_\mathrm{voda}}{\Phi}$$

$$V_\mathrm{mrak} = \frac{3\cdot 10^6\cdot 10\cdot 10^{-3}\cdot 10^6}{12{,}83}\,\mathrm{m}^3 \doteq 2{,}34\cdot 10^9\,\mathrm{m}^3 = 2{,}34\,\mathrm{km}^3\,.$$

   Maximální objem mraku je $V_\mathrm{mrak} = 2{,}34\,\mathrm{km}^3$.

[1] V reálném světě by se pak samozřejmě nemohl vypršet, protože by teplota byla zase vysoko nad rosným bodem.

2. Z předchozí části známe hmotnost vody $m_{\text{voda}} = Sh\varrho_{\text{voda}} = 3 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3\,\text{kg} = 3 \cdot 10^7\,\text{kg}$. Pomocí této informace můžeme vypočítat, kolik tepla voda při zkapalnění odevzdá. Vydané teplo Q je rovno ml_{k}, kde l_{k} je skupenské teplo kondenzace. V tabulkách můžeme tuto hodnotu vyhledat: $l_{\text{k}} = 2\,260\,\text{kJ}{\cdot}\text{kg}$.

   Teplo, které přechod mezi skupenstvími uvolní, ohřívá okolní vzduch. Z kalorimetrické rovnice známe vztah pro teplo přijaté vzduchem, jenž díky tomu změnil svou teplotu

$$Q = m_{\text{vz}} c_{\text{vz}} \Delta t\,,$$

   kde $c_{\text{vz}} = 1 \cdot 10^3\,\text{J}{\cdot}\text{kg}^{-1}{\cdot}\text{K}^{-1}$ vyjadřuje měrnou tepelnou kapacitu vzduchu. Vyjádřením rozdílu teplot Δt a dosazením za přijaté teplo Q_p dodané kondenzací nyní můžeme spočítat konečnou teplotu

$$\Delta t = \frac{m_{\text{voda}} l_{\text{k}}}{m_{\text{vz}} c_{\text{vz}}}\,.$$

   Můžeme si všimnout, že neznáme hmotnost vzduchu m_{vz}. Tu opět získáme pomocí hustoty vzduchu jakožto $m_{\text{vz}} = V_{\text{mrak}}\varrho_{\text{vz}}$.

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{m_{\text{voda}} l_{\text{k}}}{V_{\text{mrak}}\varrho_{\text{vz}} c_{\text{vz}}}\\
\Delta t &= \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 2\,260 \cdot 10^3}{2{,}34 \cdot 10^9 \cdot 1{,}2 \cdot 1 \cdot 10^3}\ {}^\circ\text{C}\\
\Delta t &\doteq 24{,}15\ {}^\circ\text{C}
\end{aligned}$$

   Tímto procesem se vzduch ohřeje asi o $\Delta t \doteq 24{,}15\ {}^\circ\text{C}$.

3. Při svislém pádu kapky vzduchem na ni působí dvě síly – tíhová síla F_{G} a síla odporu vzduchu[2] F_{o}. Tyto síly se navzájem vyrovnávají, takže kapka dosáhne stavu, kdy již nebude vlivem gravitačního zrychlení zrychlovat, ale udrží si konstantní rychlost. Tuto rychlost nazýváme *terminální* a je to maximální rychlost, které může těleso při pádu stojatým vzduchem dosáhnout. Předpokládáme, že kapka této rychlosti nabude okamžitě po kondenzaci (ustálení velikosti).

   Pro výpočet boční rychlosti větru potřebujeme nejdříve znát tuto terminální rychlost kapky. Díky vyrovnání F_{G} a F_{o} můžeme říct, že platí rovnost $F_{\text{G}} = F_{\text{o}}$. Tuto rovnost můžeme poněkud upravit:

$$\begin{aligned}
F_{\text{G}} &= F_{\text{o}}\,,\\
mg &= \frac{1}{2} C \varrho_{\text{vz}} S v^2\,,\\
V\varrho_{\text{voda}} g &= \frac{1}{2} C \varrho_{\text{vz}} S v^2\,.
\end{aligned}$$

   Zde objem V vyjadřuje objem kapky a $g = 9{,}81\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}$ tíhové zrychlení. Kapku považujeme za dokonalou kouli, takže pro objem V platí $V = (4/3)\pi r^3$, kde r značí poloměr kapky.

[2] Ve skutečnosti na kapku působí více sil, ale tyto dvě jsou nejpodstatnější a ostatní, například vztlakovou sílu, můžeme zanedbat.

Dále kruhový průřez kapky S není nic jiného, než kruh v samém středu koule – proto je plocha S rovna πr^2.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\text{voda}} g &= \frac{1}{2} C \varrho_{\text{vz}} \pi r^2 v^2 \\
\frac{4}{3} r \varrho_{\text{voda}} g &= \frac{1}{2} C \varrho_{\text{vz}} v^2 \\
\frac{8 r \varrho_{\text{voda}} g}{3 C \varrho_{\text{vz}}} &= v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{8 r \varrho_{\text{voda}} g}{3 C \varrho_{\text{vz}}}} \\
v &= \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}001 \cdot 1\ 000 \cdot 9{,}81}{3 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2}}\ \mathrm{m/s} \\
v &\doteq 6{,}603\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

Nyní, když známe svislou pádovou rychlost kapky, máme na výběr z několika možností, jak zjistit boční rychlost. Jedna možnost je využitím goniometrických funkcí. Další, o něco jednodušší variantou je vypočítat, jak dlouho bude kapka padat, a následně vypočítat potřebnou rychlost k vyhnutí lesu. Ovšem nejjednodušší postup je pomocí poměrů a úvahy. V každém případě uvažujeme, že jsou kapky dokonale unášené a ve vodorovném směru se pohybují stejně rychle jako vítr.

Známe jak výšku $h = 300\,\mathrm{m}$, ze které padají, tak délku lesa $d = 1\,000\,\mathrm{m}$, který musí přeletět. Poměr těchto dvou vzdáleností je $d : h = 1\ 000 : 300 = 10 : 3$, neboli $d = \frac{10}{3} h$. Jestliže je tedy horizontální vzdálenost rovna 10/3 té vertikální, bude i horizontální (boční) rychlost 10/3 té vertikální, jinak řečeno:

$$v_{\text{bok}} = \frac{10}{3} v = \frac{10}{3} \cdot 6{,}603 = 22{,}01\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Boční vítr musí vát rychlostí $v_{\text{bok}} = 22{,}01\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, aby se kapky nedostaly do lesa. Pro zajímavost: to podle Baufortovy studnice odpovídá stupni 9 – silný vichr, tj. vichřici. Při ní se může řada stromů poškodit.

Adam Krška
`adam@vyfuk.mff.cuni.cz`