Úloha VI.3 ... Highway to Hell

6 bodů; průměr 5,45; řešilo 11 studentů

Dříve, než bude skrz Kuželový vrch, který má s dostatečnou přesností tvar kuželu, postaven nový tunel, má Jirka na výběr. Musí si vybrat, jestli jej při cestě z jedné strany na druhou objede po silnici obkružující jeho úpatí, nebo to vezme přímo do kopce a z kopce přes jeho vrchol. Vrch má výšku h a poloměr podstavy r. Palivo může Jirka ušetřit tím, že za vrcholem, který je v polovině cesty, vypne motor a sjede z kopce samospádem.

Jirkovi je jasné, že se mu přímá cesta vyplatí jen do určité maximální výšky h. Pomozte mu ji najít, když víte, že na ujetý kilometr spotřebuje zapnutý motor C mililitrů paliva a jeden mililitr poskytne H joulů energie Jirkově vozu o hmotnosti m. Zajímá nás tedy, jakou výšku h by kužel o poloměru podstavy r musel mít, aby Jirka spotřeboval stejné množství paliva na jeho objetí, a na jeho vyjetí nahoru a poté sjetí dolů?

Návod: práci výjezdu na kopec můžete uvažovat jako součet příspěvků jízdy po rovince pomyslné podstavy pod cestou + vytažení auta do odpovídající výšky.

Bonus pro velmi náročné: započítejte do výsledku přesné prodloužení trasy závislé na h.

Začneme určením množství energie, kterou je třeba dodat pro ujetí jednoho metru. Na jeden kilometr spotřebujeme C mililitrů paliva, na jeden metr to tedy bude $C \cdot 10^{-3}$ ml, a když jeden ml dodá H joulů, tak $C \cdot 10^{-3}$ ml dodá $C \cdot H \cdot 10^{-3}$ J. Všimněte si, že s C a H zacházíme jako bezrozměrnými veličinami. Energetickou spotřebu auta si můžeme označit např. S:

$$S = C \cdot H \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Teď, když víme, kolik energie je potřeba na ujetí jednoho metru, musíme ještě spočítat, jakou dráhu Jirka v jednotlivých případech urazí.

1. Jirka objede kopec: urazí tedy dráhu o velikosti poloviny obvodu kruhové podstavy:

$$s_1 = \pi r$$

a spotřebuje energii:

$$E_1 = S\pi r.$$

2. Jirka kopec přejede: musí dodat energii na uražení dráhy r (na vrcholu kopce vypne motor) a potenciální energii

$$E_p = mgh\,,$$

celková vydaná energie tedy bude:

$$E_2 = Sr + mgh.$$

Abychom zjistili hraniční výšku h, kdy je jedno, kterou cestou se vydá, musíme říct, že $E_1 = E_2$:

$$\begin{aligned} S\pi r &= Sr + mgh \\ (\pi - 1)Sr &= mgh \\ h &= \frac{(\pi - 1)Sr}{mg}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Bonus pro velmi náročné: Rozdíl ve dráze nastane pouze při jízdě do kopce a z kopce. Zde tentokrát nemůžeme počítat s tím, že Jirka jede po pomyslné podstavě přímou čarou, protože ve skutečnosti nejdříve vyjíždí po přeponě pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami r a h. Aby kopec přejel, stačí mu opět pouze vyjet na vrchol. Palivo ale pálí na dráze

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}\,,$$

celkově spotřebuje energii

$$E_2 = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot S + mgh\,.$$

Opět řekneme, že $E_1 = E_2$, ale tentokrát nás bude čekat několik o něco málo složitějších úprav.

$$\begin{aligned} S\pi r &= \sqrt{r^2 + h^2} \cdot S + mgh \\ \pi r &= \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{mgh}{S} \qquad (2) \\ \left(\pi r - \frac{mgh}{S}\right)^2 &= r^2 + h^2 \\ \pi^2 r^2 - \frac{2\pi rmgh}{S} + \frac{m^2 g^2 h^2}{S^2} &= r^2 + h^2 \end{aligned}$$

Vznikla nám kvadratická rovnice, kterou převedeme do tvaru:

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

kde a, b, c jsou nějaké konstanty. Tato rovnice se řeší napřed výpočtem takzvaného diskriminantu D:

$$D = b^2 - 4ac,$$

který potom dosadíme do vzorce pro kořeny rovnice:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$

Teď se vraťme zpět k naší rovnici převedené do požadovaného tvaru:

$$\left(\frac{m^2 g^2}{S^2} - 1\right) h^2 + \left(-\frac{2\pi rmg}{S}\right) h + r^2(\pi^2 - 1) = 0\,, \qquad (3)$$

vyjádříme diskriminant:

$$\begin{aligned} D &= \frac{4\pi^2 r^2 m^2 g^2}{S^2} - 4r^2 + 4\pi^2 r^2 + \frac{4r^2 m^2 g^2}{S^2} - \frac{4\pi^2 r^2 m^2 g^2}{S^2} \\ D &= 4r^2 \left(\frac{m^2 g^2}{S^2} + \pi^2 - 1\right) \end{aligned}$$

a dosadíme do vzorce pro kořen:

$$\begin{aligned} h &= \frac{2\pi rmg/S \pm 2r\sqrt{m^2 g^2/S^2 + \pi^2 - 1}}{2\left(m^2 g^2/S^2 - 1\right)}\,, \\ h &= r \cdot \frac{\pi mg/S \pm \sqrt{m^2 g^2/S^2 + \pi^2 - 1}}{m^2 g^2/S^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Dostali jsme trochu komplikovaný, ale poměrně přesný vzorec s neurčitým znaménkem. Protože jsme ale při odvozování použili neekvivalentní úpravu, tedy úpravu, která nezachovává počet řešení, musíme provést zkoušku dosazením do původní rovnice (2), čímž zjistíme, že platí pouze řešení s minusem. Stejného výsledku se můžeme dobrat i čistě fyzikální úvahou. Předpokládejme třeba, že zlomek mg/S je mnohem větší než jedna čili počet joulů na metr je mnohem větší při jízdě do kopce než při jízdě po rovince – toto by odpovídalo např. dobrému stavu silnic a velké efektivitě vozidel. Poté můžeme aproximovat následovně:

$$h \approx r \cdot \frac{\pi mg/S \pm \sqrt{m^2g^2/S^2}}{m^2g^2/S^2}$$

$$h \approx r \cdot \frac{S}{mg}(\pi \pm 1)\,.$$

Vidíme, že máme dvě řešení, přičemž předešleme, že fyzikálně správné (a shodné s přibližným výsledkem (1)) je pouze *to menší* (s minusem), což platí i o kompletních přesných vztazích výše. Je sice pravda, že obě řešení jsou kladná (a Kuželový vrch by tedy mohl nabývat obě výšky), ale jen jedno odpovídá tomu Jirkou hledanému. Podívejme se zpět na kvadratickou rovnici (3), ze které jsme předtím určovali diskriminant. Pro $mg/S \gg 1$ se z ní stává:

$$\left(\frac{m^2g^2}{S^2}\right)h^2 + \left(-\frac{2\pi rmg}{S}\right)h + r^2(\pi^2 - 1) = 0\,,$$

Po mnoha úpravách (včetně doplnění na čtverec a odmocnění rovnice, které řešení opět rozštěpí na dvě) tuto rovnici převedeme na tvar porovnatelný s původním zadáním (2):

$$\pi r = \mp\sqrt{r^2} + \frac{mgh}{S}\,. \tag{4}$$

Jasně vidíme, že jde zase o rovnice lineární v h, které můžeme velmi snadno převést na už zmíněnou dvojici řešení:

$$h = r \cdot \frac{S}{mg}(\pi \pm 1)\,. \tag{5}$$

Ponaučení v tomto bodě může být, že pokud některé členy z rovnic vypouštíme pro zjednodušení, rovnice se mohou i změnit z kvadratických na lineární. Těchto lineárních rovnic je ale tolik, kolik má být kořenů.

Proč je tedy správné řešení s minusem? Ze dvou hledisek: za prvé Jirka hledá maximální výšku, pro kterou se vyplatí jet do kopce namísto okolo, tj. minimální výšku, na které se pravá strana (1) stává větší než levá. Při žádné větší výšce už cesta do kopce nemůže být opět výhodná, protože spotřeba se pak jen zvyšuje, a přitom dráha okolo Kuželového vrchu zůstává konstantní, tj. cesta okolo je se zvětšující se výškou stále výhodnější. Minimální výška vrchu, kterou můžeme uvažovat, je nulová. Pokud tedy úvahu začínáme z nejmenší konečné výšky, první menší kořen, na který narazíme, bude i správný. Druhým hlediskem je fyzikální podoba rovnice. Řešení rovnice (4) s minusem odpovídá rovnici (3) s plusem, tj. podobně jako když jsme v rovnici (3) spotřebu při výjezdu přičítali. V přiblížení velkého mg/S prostě jen v rovnici chybí člen $+h^2$, který byl předtím pod odmocninou.

Nakonec v této úloze obecně, ať už v přesném či přibližném řešení, nemůžeme zapomenout na to, že všechny uvedené výsledky jsou pořád jen aproximace, protože předpokládáme, že spotřeba auta je konstantní v čase. Ve skutečnosti je spotřeba závislá třeba i na rychlosti, protože s větší rychlostí se zvětšují i odporové síly.

Jiří Kohl

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.