Úloha VI.2 ... Na zahradě krtek vrtá... 6 bodů; průměr 4,80; řešilo 20 studentů

Ve městě Glasgow mají jako dopravní systém metro, které jezdí po kruhové trase, a říkají mu poeticky Clockwork Orange. Dříve, než se vůbec postavilo, bylo potřeba propočítat pár údajů, aby bylo jasné, zda by se tato investice vyplatila. Ve zjednodušené verzi vyřešíme obdobný problém.

Metro by jezdilo jedním směrem po kruhové trase, kde by po každém kilometru byla umístěna jedna zastávka, kterých by bylo celkem 15. Jedna souprava by projela celý okruh za 30 minut a její kapacita by byla 50 lidí. V dopravní špičce na každou zastávku by přišel jeden člověk každých třicet sekund a dá se předpokládat, že na každé zastávce, kterou by souprava projela, by do ní nastoupili všichni lidé, kteří by se tam vešli, a pouze čtyři by vystoupili. Klasicky, jak je v metru zvykem, se nejdříve vystupuje, poté nastupuje. Čas na výstup a nástup lidí můžeme zanedbat.[1] Vedení města se ptá na tyto otázky:

1. *Kolik nejméně souprav by muselo ve špičce jezdit, aby se na zastávkách nehromadili lidé (tj. aby celkový počet lidí na všech zastávkách neustále nerostl)?*
2. *Pokud bychom neměli dostatek souprav, po jak dlouhé trase by se jedna zaplnila, jezdili na okruhu sama a z první zastávky na začátku provozní doby by vyjížděla prázdná (tj. i všechny ostatní zastávky by ještě byly prázdné)?*

Nejdříve si musíme určit, jak dlouho trvá soupravě dojet z jedné zastávky na druhou. Tuto dobu si označíme jako t, abychom s ní mohli pracovat obecně. Z tohoto času vypočteme, kolik lidí se na zastávce nahromadí mezi odjezdem soupravy z jedné zastávky a příjezdem do druhé (následující) zastávky.

Víme, že celý okruh projede souprava za čas $t_\mathrm{c} = 30\,\mathrm{min}$ a že na okruhu je $N = 15$ zastávek rovnoměrně rozmístěných tak, že je mezi každými dvěma rozestup $s = 1\,\mathrm{km}$. To znamená, že souprava ujede za čas t_c dráhu $s_\mathrm{c} = Ns = 15\,\mathrm{km}$. Samozřejmě do t_c počítáme i čas, za který souprava projede závěrečný úsek mezi poslední zastávkou a tou první, ze které na začátku vyjížděla.[2]

Z toho už můžeme určit čas t, pomocí známého kinematického vzorce $t = s/v$, kde $v = s_\mathrm{c}/t_\mathrm{c}$.

$$t = \frac{t_\mathrm{c}}{s_\mathrm{c}} s = \frac{t_\mathrm{c}}{N} = \frac{30\,\mathrm{min}}{15} = 2\,\mathrm{min}\,.$$

Z tohoto času už můžeme vypočítat, kolik lidí přibude na zastávce, zatímco souprava jede z předchozí zastávky. Označme intervaly příchodů lidí jako $t_\mathrm{l} = 30\,\mathrm{s}$ a počet lidí, kteří přibudou, n. Pak pro počet přibyvších lidí jistě platí:

$$n = \frac{t}{t_\mathrm{l}} = \frac{120\,\mathrm{s}}{30\,\mathrm{s}} = 4\,.$$

Nyní již víme vše potřebné, abychom mohli začít řešit obě otázky.

[1] I když v reálném životě jej rozhodně při plánování zanedbávat nemůžeme.

[2] Pokud by zastávky nebyly v kruhu, byla by mezi patnácti zastávkami dráha pouze 14 km. Doporučujeme si nakreslit nákres pro lepší pochopení.

1. Předpokládejme, že soupravy jezdí na dráze tak, že mají mezi sebou stejné rozestupy, protože je to nejefektivnější. Počet cestujících v každé soupravě je tedy vždy stejný. Zaměřme se tedy na to, co se děje s jednou konkrétní soupravou.

   Dejme tomu, že na každé zastávce do soupravy nastoupí více lidí, než z ní vystoupí. Pak se někdy nutně stane, že se přeplní a lidé do ní již nebudou moci nastupovat. Sledujme nyní jednu konkrétní zastávku. Na ni jezdí vozy s periodou T a mezitím přibude nějaký počet lidí m. Do každého vozu ale nastoupí menší počet lidí než m (nemohou nastoupit všichni, neboť vůz je plný), takže na zastávce někdo zbude. Než přijede další vůz, přijde dalších m lidí, poté na zastávce zbude více lidí atd. V tomto případě se tedy zastávky začnou plnit.

   Musíme tedy zajistit, aby do souprav nepřibývali žádní lidé, jinak by se časem začaly plnit zastávky. Maximálně tedy můžou nastoupit 4 lidé do soupravy na jedné zastávce. To znamená, že soupravy musí jezdit každé 2 min, jelikož to je čas, za který přijdou na zastávku 4 lidé.

   Jestliže mají soupravy jezdit každé 2 min a zároveň jedné soupravě trvá přesun z jedné zastávky na druhou 2 min, je jasné, že souprav musí být stejný počet, jako je zastávek, tedy 15. Pokud by souprav jezdilo méně, už by nestíhaly, kdyby jich jezdilo více, vyprazdňovaly by se.

2. Na každé zastávce do uvažované soupravy přibude tolik lidí, kolik jich je na dané zastávce v daný čas (jejich počet odpovídá době jízdy soupravy) a zároveň 4 lidé vystoupí (kromě té první, na které nikdo nevystoupí). Nejjednodušší bude odsimulovat si průběh cesty jedné soupravy, pokud by na trase jezdila sama:

   $$0 \Rightarrow 4(+4) \Rightarrow 8(+8-4) \Rightarrow 16(+12-4) \Rightarrow 28(+16-4) \Rightarrow 44(+20-4) \Rightarrow 64\ldots$$

   Vidíme, že počet cestujících v soupravě by předčil její kapacitu na šesté zastávce.

   Kdybychom nechtěli situaci simulovat ručně, mohli bychom si všimnout, že na k-té zastávce (pro výchozí zastávku, ve které ještě nikdo nenastupuje, bereme $k = 0$) přibude $4k - 4 = 4(k-1)$ lidí (tento vzorec ovšem platí až od druhé zastávky, kde vystupují první lidé, tedy podmínka je $k > 2$). S neomezeným místem v každém metru by se tak počet lidí v zastávce č. $k > 2$ za použití matematického symbolu $\sum$ pro sumaci dal vyjádřit takto:

   $$n = 4 + \sum_{i=1}^{k} 4(i-1) = 4 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} i\,,$$

   tj. např. v zastávce č. 3 by to bylo:

   $$n = 4 + 4 + 2 \cdot 4 = 16\,\text{lidí}.$$

   Sumu můžeme ještě vyjádřit takto (jedná se o tzv. trojúhelníkové číslo):

   $$n = 4 + \frac{(k-1)k}{2}\,.$$

   Tento vzorec platí pro zastávky, na kterých se od výjezdu soupravy pouze hromadili lidé, tedy pouze pro první kolo cesty. Při druhém okruhu soupravy by přibývalo lidí v soupravě už vždy stejně, a to tolik, kolik jich na zastávku přišlo od posledního odjezdu soupravy, tedy za 30 min. Za tuto dobu bude na zastávce $30\,\mathrm{min}/30\,\mathrm{s} = 60$ lidí, tedy do vlaku celkem přibude $60 - 4 = 56$ lidí.

Robert Gemrot

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.