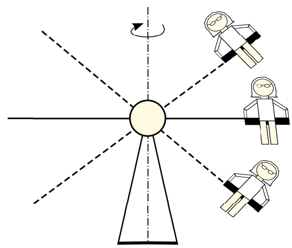
Úloha IV.5 ... Už se to točí?

8 bodů; průměr 5,00; řešilo 11 studentů



Některé kolotoče na poutích se dokáží sklápět tak, že návštěvníci sedí nakloněni na stranu pod úhlem 45° vůči zemi jednou nad a jindy pod původní vodorovnou hladinou, přičemž je osa otáčení stále kolmá k zemi tak jako na obrázku. Jednou si Bětka do takového kolotoče s koeficientem smykového tření μ sedla[1] (pohledem ve směru otáčení), byla připoutaná a nedržela se. Při dostatečně rychlých otáčkách však tření přestalo stačit a Bětka se musela chytit, aby zůstala na místě. Tíhové zrychlení g považujeme jako obvykle za známé.

1. *Určete maximální otáčky kolotoče, kdy se Bětka ještě nemusí držet, pokud je mezi Bětkou a osou kolotoče známá vzdálenost r a kolotoč je zpočátku nastaven do vodorovné polohy.*
2. *Jak velká je maximální možná na Bětku působící třecí síla při hmotnosti m, pokud ji kolotoč naklopí o 45° k zemi, avšak při stejné délce ramene[2] a dané rychlosti otáčení ω kolem stále svislé osy?*
3. *Jaké jsou v takovém případě opět maximální otáčky bez držení? Jaké podmínky by měl z toho splňovat koeficient tření, aby se návštěva poutě odehrála postupně tak, jak je popsáno v prvním odstavci?*
4. *Pokud naopak rameno zvedneme o 45° nad původní polohu, jak se obě podmínky změní?*

Své výsledky můžete uvést v úhlové rychlosti (ω) i frekvenci (f).

Tuto úlohu je možno řešit obecně za použití goniometrických funkcí, ale také výhradně pro toto zadání uvážením rozkladu síly, která tvoří úhlopříčku čtverce, jehož strany jsou svislými a vodorovnými složkami síly, s pouhým převodem pomocí $\sqrt{2}$. Oba způsoby jsou zde popsány. Pokud tedy ještě neumíte goniometrické funkce používat, čtěte toto vzorové řešení klidně dál, dokud se výklad nestane pochopitelným.

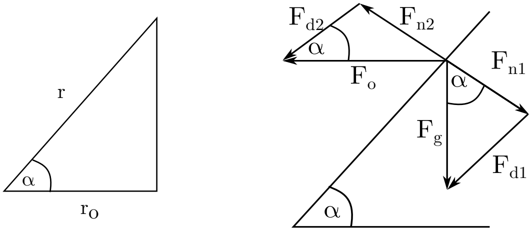
Na úvod se zamyslíme, jak vždy určíme, jestli Bětka klouže z kolotoče, nebo ne. Bětka se obecně nachází na nějaké nakloněné rovině svírající se zemí úhel α (nakloněná rovina je sedačka kolotoče, kterou považujeme za rovnou). Pokud je kolotoč rovnoběžný se zemí, znamená to jen, že $\alpha = 0°$.

Uděláme si tedy náčrtek Bětky na kolotoči, ve kterém znázorníme síly na ni působící (viz. obrázek 1).

Jak vidíme, poloměr otáčení r_o je na náčrtku jiný, než je délka ramena r (ostatně to nám napovídá už i zadání). Pro výpočet odstředivé síly nutně potřebujeme znát poloměr otáčení, který vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku

$$r_o = r\cos\alpha\,.$$

[1] Řecké písmeno μ [mí] je dalším z často používaných symbolů pro koeficient smykového tření kromě f.
[2] Poloměr otáčení bude tedy nutně menší než délka ramene.



Obr. 1: Rozklad sil působících na Bětku.

Bětčinu tíhovou sílu o velikosti $F_\mathrm{G} = mg$ směřující kolmo k zemi jsme rozložili na složky F_n1, která směřuje kolmo k podložce (sedačce kolotoče) a na F_d1, která pomáhá Bětce sklouznout dolů. Jejich velikosti odvodíme pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus

$$F_\mathrm{n1} = F_\mathrm{G} \cos\alpha\,,$$
$$F_\mathrm{d1} = F_\mathrm{G} \sin\alpha\,.$$

Odstředivou sílu o velikosti $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r$ jsme rozložili taktéž do dvou složek: F_n2, která „nadzvedává“ Bětku ze sedačky (dle našeho náčrtku má opačný směr než F_n1) a F_d2, která pomáhá Bětce sklouznout ze sedačky (tedy má stejný směr jako F_d1). Jejich velikosti jsou

$$F_\mathrm{n2} = F_\mathrm{o} \sin\alpha\,,$$
$$F_\mathrm{d2} = F_\mathrm{o} \cos\alpha\,.$$

Nesmíme ale zapomenout, že pokud bude kolotoč nadzvednutý (místo poklesnutý), bude mít F_n2 stejný směr jako F_n1 a naopak F_d2 bude mít opačný směr než F_d1.

Hraniční podmínka pro to, jestli Bětka sklouzne, nebo ne, je vyjádřena rovnováhou sil tečných s nakloněnou rovinou. Konkrétně jde o rovnost třecí síly $F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n}$ a pohybové, která ji stahuje dolů:

$$\mu(F_\mathrm{n1} \pm F_\mathrm{n2}) = F_\mathrm{d1} \pm F_\mathrm{d2}\,.$$

Znaky $\pm$ na obou stranách rovnice vyjadřují směr dané síly – pokud má druhá síla stejný směr jako první, tak ji přičteme, pokud opačný směr, tak ji odečteme. Vzpomeňme si totiž na to, že třecí síla působí vždy proti směru pohybu.

Hodně z nás ale není zběhlých v počítání se siny a kosiny. V zadání příkladu máme vždy buď úhel $\alpha = 0^\circ$ (v prvním podúkolu), nebo úhel $\alpha = 45^\circ$ (v ostatních podúkolech). Řešení nebudeme provádět úplně obecně, ale trošku si pomůžeme tím, že hned budeme dosazovat za siny a kosiny.

Hodnota 45° je zvláštní v tom, že pro ni platí

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

což lze odvodit geometricky (úhel 45° se vyskytuje například v jednotkovém čtverci, jehož uhlopříčka má délku $\sqrt{2}$). Budeme tedy vždy za hodnoty $\sin 45^\circ$ a $\cos 45^\circ$ dosazovat hodnotu $1/\sqrt{2}$ (ačkoliv matematikům se to možná nebude líbit, neboť máme odmocninu ve jmenovateli).

1. Zopakujeme si, k čemu jsme dospěli v prvním odstavci.

   Na Bětku působí směrem ven z kolotoče odstředivá síla F_o o velikosti $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r$. Proti této síle, pokud se Bětka nedrží, působí pouze třecí síla F_t, kterou spočteme z normálové síly $F_\mathrm{n} = mg$ jako $F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n} = mg\mu$. Bětka se může nedržet právě do té chvíle, dokud je $F_\mathrm{t} \geq F_\mathrm{o}$. V hraničním případě tedy platí $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{o}$, tedy

   $$m\omega^2 r = mg\mu\,.$$

   Z čehož vyjádříme maximální úhlovou rychlost kolotoče[3]

   $$\omega = \sqrt{\frac{g\mu}{r}}\,.$$

   Pokud bychom chtěli zjistit počet otáček f za sekundu (frekvenci otáčení), přepočteme podle vzorce $\omega = 2\pi f$.

2. Bětčinu tíhovou sílu musíme rozložit do směru, který je kolmý k podložce (k sedačce) a do směru, který naopak pomáhá tomu, aby Bětka ze sedačky sklouzla. Velikost síly kolmé k podložce je $F_\mathrm{n1} = mg\cos\alpha$ a velikost síly, která pomáhá Bětce sklouznout je $F_\mathrm{d1} = mg\sin\alpha$ (jak víme z úvodu). Dosadíme za siny a kosiny

   $$F_\mathrm{n1} = \frac{mg}{\sqrt{2}}\,,$$
   $$F_\mathrm{d1} = \frac{mg}{\sqrt{2}}\,.$$

   Nyní musíme zjistit poloměr otáčení r_o, neboť je jiný než délka ramene. Z úvodu víme, že $r_\mathrm{o} = r\cos\alpha = r/\sqrt{2}$.

   Odstředivá síla o velikosti $F_\mathrm{o2} = m\omega^2 r_\mathrm{o}$ směřuje vodorovně ven z kolotoče. My ji ale musíme rozložit na sílu, která má stejný směr jako F_d1, abychom mohli zjistit celkovou na Bětku působící pohybovou sílu, a na sílu, která Bětku „nadzvedává“ – má opačný směr než F_n1 (a bude tedy snižovat tření). Obdobně jako při rozkládání tíhové síly nám vychází $F_\mathrm{d2} = F_\mathrm{o2}\cos\alpha = F_\mathrm{o2}/\sqrt{2}$ a $F_\mathrm{n2} = F_\mathrm{o}\sin\alpha = F_\mathrm{o2}/\sqrt{2}$. Mohlo by nás zmást, že se prohodily funkce sinus a kosinus, ale to je proto, že odstředivá síla směřuje vodorovně na rozdíl od tíhové síly, která směřuje svisle dolů.

   Zjistíme celkovou normálovou sílu F_n jako rozdíl F_n1 a F_n2, neboť působí opačným směrem

   $$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{n1} - F_\mathrm{n2} = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{F_\mathrm{o2}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 r}{2}\,.$$

   Z normálové síly zjistíme třecí sílu F_t působící proti tomu, aby Bětka sklouzla:

   $$F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n} = \mu\left(\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 r}{2}\right)\,.$$

   Maximální možná třecí síla, která může na Bětku působit při úhlové frekvenci ω, je vyjádřená výše. Především si musíme uvědomit, že se jedná o maximální možnou velikost, tedy že pokud k udržení Bětky na sedačce stačí menší síla, bude tato třecí síla menší.

[3]Zde jen malá matematická vložka. Rovnici odmocňujeme, což není ekvivalentní matematická úprava. Správné řešení není tedy jen to, ke kterému jsme došli, nýbrž i to, kde ω má opačnou hodnotu. V běžných situacích nemá takové řešení fyzikální smysl, tady však smysl má – kolotoč se točí na opačnou stranu.

3. Dále zjistíme celkovou sílu F_d působící tak, aby Bětka sklouzla
$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{d1} + F_\mathrm{d2} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{F_\mathrm{o2}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\,.$$
Pokud se Bětka nemá držet, musí být třecí síla větší nebo rovna síle, která způsobuje pohyb dolů. V hraničním případě se rovnají, tedy
$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{d}\,.$$
Dosadíme:
$$\mu\left(\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 r}{2}\right) = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\,.$$
Z této rovnice vyjádříme maximální úhlovou rychlost ω
$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}(\mu-1)}{r(\mu+1)}}\,.$$
Vidíme, že v čitateli od koeficientu tření μ odečítáme jedničku. Co to znamená? Jen to, že aby se Bětka mohla na začátku nedržet (i kdyby se kolotoč vůbec netočil), musí platit $\mu \geq 1$, protože pod odmocninou nesmí být záporné číslo. Jinak by složka tíhové síly, která způsobuje pohyb dolů, byla větší než třecí síla a Bětka by ihned klouzala dolů. Pro zájemce dodáme, že kdybychom postupovali v čiré obecnosti, vyšlo by nám
$$\omega = \sqrt{\frac{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{r(f\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}}\,.$$

4. Rozklad tíhové síly působící na Bětku už máme hotov, kolmo k podložce působí $F_\mathrm{n1} = mg/\sqrt{2}$ a směrem k ose otáčení kolotoče po podložce působí síla $F_\mathrm{d1} = mg/\sqrt{2}$. Poloměr otáčení r_o taky známe $r_\mathrm{o} = r/\sqrt{2}$.

   Jediné, co se změní, je rozklad odstředivé síly $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r_\mathrm{o}$. Tu nyní rozložíme do směru kolmého k podložce (stejný směr jako F_n1) a do směru, který by způsoboval pohyb Bětky nahoru po podložce (tedy opačný směr než F_d1). Velikosti těchto sil máme určené z úvodu
$$F_\mathrm{n2} = \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}}\,,$$
$$F_\mathrm{d2} = \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}}\,.$$
   Nyní vypočítáme celkovou sílu F_n působící kolmo k podložce
$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{n1} + F_\mathrm{n2} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r}{2}\,,$$
   a celkovou sílu F_d působící ve směru ven z kolotoče po podložce (jako rozdíl $F_\mathrm{d2} - F_\mathrm{d1}$, neboť tyto síly působí opačným směrem) za předpokladu, že $F_\mathrm{d2} \geq F_\mathrm{d1}$ (tedy že by se Bětka pohybovala směrem ven od kolotoče po podložce)
$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{d2} - F_\mathrm{d1} = \frac{F_\mathrm{o}}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{m\omega^2 r}{2} - \frac{mg}{\sqrt{2}}\,.$$

Hraniční podmínka nastane, rovná-li se třecí síla $F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{n}$ celkové síle, která Bětku posunuje

$$\mu\left(\frac{mg}{\sqrt{2}}+\frac{m\omega^2 r}{2}\right)=\frac{m\omega^2 r}{2}-\frac{mg}{\sqrt{2}}\,.$$

Můžeme si všimnout, že oproti minulému případu jsou znaménka na obou stranách rovnice prohozená: tření je zesíleno přitlačením Bětky do sedačky, a pohybovou sílu umenšuje tíhová, tedy Bětka je gravitací „stahována“ dovnitř kolotoče. Vyjádříme ω jako

$$\omega=\sqrt{\frac{g\sqrt{2}(1+\mu)}{r(1-\mu)}}\,.$$

Ve jmenovateli od 1 odečítáme μ, což znamená, že $\mu \leq 1$. Co znamená podmínka, že koeficient smykového tření musí být menší než jedna? To znamená jenom to, že pro větší tření je třecí síla větší než síla působící nahoru při libovolně velké ω, tedy nemá smysl určovat její maximum.

Pro zájemce opět přidáme obecné řešení

$$\omega=\sqrt{\frac{g(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)}{r(\cos^2\alpha-f\sin\alpha\cos\alpha)}}\,.$$

Výše jsme předpokládali, že $F_\mathrm{d2} \geq F_\mathrm{d1}$. Co kdyby to bylo naopak? Bětka by klouzala směrem dolů ke středu kolotoče, protože by odstředivá síla, a tedy i rychlost otáčení byla moc malá. V tomto případě vypočítáme minimální potřebnou ω a to tak, že jednoduše odečteme obráceně. To se promítne do výsledku takto (úpravy necháme na poctivém čtenáři)

$$\omega=\sqrt{\frac{g\sqrt{2}(1-\mu)}{r(1+\mu)}}\,.$$

Což opět vede k podmínce $\mu \leq 1$, která ale znamená náš známý fakt, že pro větší μ se Bětka nezačne pohybovat bez ohledu na úhlové rychlosti.

Robert Gemrot

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.