

Úloha IV.3 ... Na železnici dějou se věci 6 bodů; průměr 3,43; řešilo 21 studentů

Mišo jedoucí ve své lokomotivě původní rychlostí v_0 začal rovnoměrně brzdit tak, aby do zastavení ujel pouze další dráhu s . Vzápětí (tj. na začátku brzdné dráhy) si však všiml, že v polovině zbývajících dráhy leží spadlý kmen stromu. Protože rychleji brzdit nemohl, nezbylo Mišovi než rychle počítat. Kolik z celkového brzdného času t uběhne až do chvíle kontaktu s překážkou na trati? Při řešení vám pomůže znázornění pohybu pomocí grafu.

Uvědomme si nejprve, co vyjadřuje zrychlení. Zrychlení a vyjadřuje rychlost, kterou těleso přidá ke své původní rychlosti za jednotku času a obvykle bývá vyjádřeno v jednotkách $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu zároveň platí vztah

$$s = \frac{1}{2}at^2,$$

ze kterého budeme vycházet. Tento vztah je odvozen z obecné rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = v_0t + at^2/2$, kde v_0 je počáteční rychlost před zrychlováním.¹

V úloze chceme zjistit, kolik z celkového času t (označme tuto část jako T) uběhne do momentu, kdy se dostaneme do poloviny dráhy. Vyjádříme si čas T z předešlého vztahu pro dráhu, neboli vynásobíme strany rovnice 2, vydělíme je a a nakonec obě strany rovnice odmocníme (nemusíme se zabývat tím, že druhá odmocnina může být i záporná, protože čas bereme jako vždy kladný). Těmito úpravami jsme dostali obecnou rovnici pro čas rovnoměrně zrychleného pohybu

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Tím získáváme vztah pro čas, za který ovšem ujedeme druhou polovinu dráhy. Proto ho musíme odečíst od celkového času t , čímž získáme rovnici pro T :

$$T = t - \sqrt{s/a}.$$

Tady ovšem nalézáme problém: neznáme zrychlení a . Toto zrychlení (zpomalení) je vždy stejné, čehož můžeme využít a vypočítat ho z celkového času t opět ze vztahu pro dráhu.

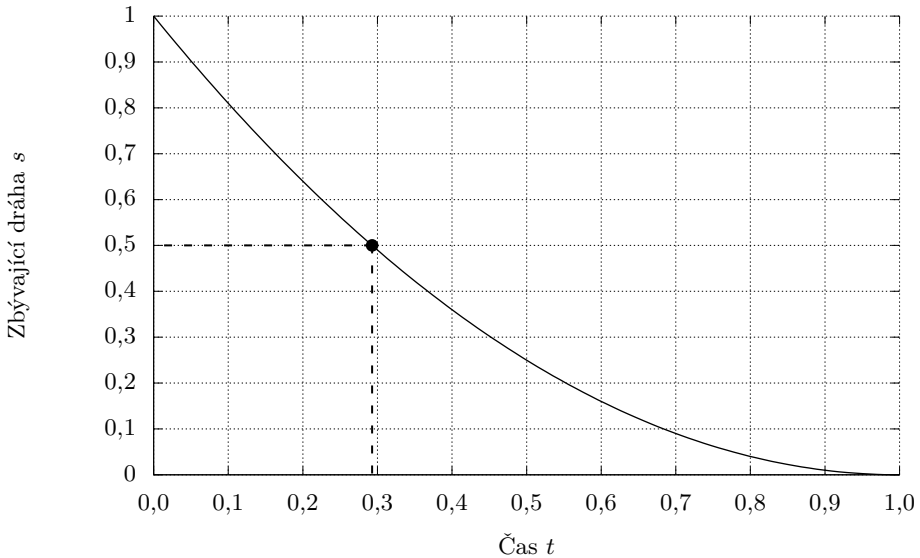
$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2s = at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}.$$

Zrychlení a můžeme dosadit zpět do naší rovnice pro T , čímž dostáváme

$$T = t - \sqrt{\frac{s}{2s/t^2}} = t - \sqrt{\frac{st^2}{2s}} = t - \sqrt{\frac{t^2}{2}} = t - \frac{t}{\sqrt{2}} = t \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vzhledem k tomu, že chceme vědět, jak velká část je T z t , vydělíme výsledek t (nebo si můžete říct, že uděláte poměr $T:t$). Výsledek tohoto dělení je $1 - 1/\sqrt{2} \approx 0,293$. Jinak řečeno: Z celkového času t uběhne zhruba $0,293t$, než se vlak dostane do poloviny své dráhy.

¹V případě zpomalení by pro dráhu platilo $s = v_0t - at^2/2$.



Obr. 1: Graf závislosti dráhy na čase s vyznačeným bodem poloviny dráhy.

Toto tvrzení si můžeme i vizuálně prokázat. Při sestrojení grafu závislosti dráhy na čase můžeme vyčíst, v jakém čase vlaku zbývá jaká část dráhy. Jestliže se tedy podíváme na hodnotu $s = 0,5$, můžeme vidět, že x-ová souřadnice bodu na této křivce je jenně před značkou $t = 0,3$, což zhruba odpovídá našemu výsledku $T = 0,293t$.

Adam Krška
adam@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.