

Úloha IV.2 ... V závějích se bude špatně sklízet

6 bodů; průměr 5,68;

řešilo 25 studentů

Během vánočních prázdnin napadalo velké množství sněhu, které bylo třeba odklidit ze dvou sousedních luk. První louka má dvojnásobnou plochu oproti té druhé. Skupinka organizátorů se ráno vrhne na první, větší louku, a začne ji odhrabávat. V polovině pracovní doby se pak skupinka rozdělí na poloviny – první polovina zůstane na velké louce a druhá začne práci na menší. Na konci pracovní doby je velká louka uklizená a na malé louce zbude tolik sněhu, že jej dokáže uklidit jeden organizátor za jeden den. Kolik organizátorů odklízelo sněh první den?

Ač se úloha může na první pohled zdát složitá, lze ji zvládnout, pokud si ji rozebereme po krocích, zapíšeme si vše, co zjistíme a nebudeme vyvozovat a tipovat věci, které si nezdůvodníme.

Na začátku víme, že na louce pracovalo několik organizátorů, jejichž počet je pro nás neznámá, na kterou budeme muset přijít. Označme si ji x .

Dále víme, že první louka je dvakrát větší než druhá. To můžeme zapsat pomocí rovnosti $l_1 = 2l_2$, kde l_1 je obsah první louky a l_2 je obsah druhé louky.¹

Dále víme, že organizátoři pracují nějak dlouhou dobu, označme si ji t . Víme, že první půlku pracovní doby pracuje x organizátorů na louce číslo jedna (té větší). V polovině pracovní doby (tj. po uplynutí času $t/2$) se skupinka rozdělí na poloviny a za zbylý čas, tedy také za $t/2$, odklidí polovina organizátorů část druhé, menší louky. Tím pádem víme, že za $t/2$ zvládne x organizátorů uklidit větší část první větší louky a za další $t/2$ ji $x/2$ organizátorů douklidí.

Zaměříme se nyní na větší louku s obsahem $l_1 = 2l_2$. Vzhledem k tomu, že jim tyto dvě části práce při počtu x a $x/2$ organizátorů trvaly stejně dlouho a podruhé bylo organizátorů dvakrát méně, odklidili dvakrát méně sněhu, než když na odklizení velké první louky pracovali všichni. Vyjádříme si to o trochu více matematicky. Nechť je w efektivita práce jednoho organizátora, tedy jak velkou plochu zvládne uklidit za nějaký čas, kterou budeme měřit v počtu menších luk sklizených za den, podle čehož budeme také nazývat jednotku „za den“ (den^{-1}). První část pracovní doby tedy organizátoři uklidili plochu o obsahu $S_1 = xwt/2$. Za druhou polovinu pracovní doby uklidili plochu s $S_2 = xwt/4$. Dohromady platí:

$$S_1 + S_2 = l_1 \quad \Rightarrow \quad 2S_2 + S_2 = l_1 \quad \Rightarrow \quad S_2 = l_1/3.$$

Vidíme tedy, že za první polovinu uklidili organizátoři $2/3$ louky a za druhou polovinu uklidili zbylou třetinu.

Stejně velkou plochu $l_1/3$ odklidila ve druhé polovině pracovního času i druhá půlka organizátorů na menší louce o výměře l_2 . Vzhledem k tomu, že $l_1 = 2l_2$, což je to samé jako $l_2 = l_1/2$, můžeme říci, že po uplynutí pracovní doby na menší louce zbylo $l_1/2 - l_1/3 = l_1/6$ plochy pokryté sněhem. (Všimněme si, že tento zbylý sněh na malé louce je vyjádřen pomocí plochy velké louky.) Ze zadání víme, že tento zbylý sněh zvládne odklidit 1 organizátor za 1 den. Tedy jsme zjistili, že $w = l_1/6 \text{ den}^{-1}$.

Ze zadání můžeme vyčíst, že organizátoři pracovali celkem jeden den, tedy $t = 1 \text{ den}$. Nyní se však můžeme vrátit k předchozím výpočtům a zaměřit se na plochu S_2 . Víme, že pro ni platí

$$S_2 = \frac{xwt}{4}, S_2 = \frac{l_1}{3}.$$

¹Ze školy asi víte, že obsah, nebo v případě luk také „výměra“, se značí S , my si jej však můžeme označit, jak chceme. Použité značení nemá na správnost vliv.

Toto můžeme spojit v jednu rovnici, všimneme si totiž, že pak dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé x , kterou dokážeme vyřešit. Rovnice vypadá takto

$$\begin{aligned}xw\frac{t}{4} &= \frac{1}{3}l_1, \\x\frac{1}{6}l_1\frac{1}{\text{den}}\frac{t}{4} &= \frac{1}{3}l_1, \\x\frac{1}{\text{den}}\frac{\text{den}}{8} &= 1, \\x &= 8.\end{aligned}$$

Na celé práci se tedy podílelo celkem 8 organizátorů.

Paola Trembulaková
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.