

Úloha I.C ... Jablko nepadlo daleko od stromu 7 bodů; (chybí statistiky)

Ačkoliv se historika o jablku spadnuvším na Newtonovu hlavu pravděpodobně odehrála jinak, nebo se vůbec neodehrála, poskytuje nám tak i tak dobré fyzikální cvičení. Představme si tedy, že Newton sedí pod stromem a spadlo na něj jablko. Odhadněte:

1. Jak velkou gravitační silou působí jablko na Newtona a Newton na jablko v okamžiku, kdy se jablko Newtona dotýká? Odhadněte všechny potřebné veličiny.
2. Jak velkou gravitační silou působí Země na jablko a jablko na Zemi? Jakým zrychlením se pohybuje Země k jablku a jakým jablko k Zemi?
3. Pokud je jedno jablko v koruně stromu a jedno leží na zemi pod ním, kde leží jejich společné těžiště? Jak velké a kam směřující je zrychlení tohoto těžiště, začne-li horní jablko padat s tíhovým zrychlením g k dolnímu?

1. K výpočtu gravitační síly využijeme následující vzorec z Výfučení:

$$F_G \doteq G \frac{mM}{r^2}.$$

Pro připomenutí, v tomto vzorci $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ značí gravitační konstantu, r vzdálenost těžišť dvou těles, mezi nimiž působí síla a m , resp. M značí hmotnost jednoho, resp. druhého tělesa.

Protože v textu úlohy není specifikováno, jak těžký Newton a jablko byli, popř. jak vysoký byl Newton, odhadneme všechny potřebné veličiny řádově, takže dostaneme řádový výsledek, který nám dodá alespoň představu o velikosti síly. Řádový odhad bychom měli používat vždy, když odhadované veličiny mohou nabývat velkého rozsahu hodnot, takže si nemůžeme být jisti jejich přesnou velikostí. Provedeme jej tak, že pravděpodobné hodnoty zaokrouhlíme na nejbližší řád, tj. mocninu desíti.

Odhadneme tedy hmotnost Newtona na 80 kg, což je řádově $M \approx 10^2 \text{ kg}$, váhu jablka na $m \approx 10^{-1} \text{ kg}$ a vzdálenost mezi těžišti jablka a Newtona $r \approx 1 \text{ m}$. Poté nám stačí pouze dosadit:

$$F_G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot 10^{-1} \text{ kg} \frac{1}{(1 \text{ m})^2} = 6,67 \cdot 10^{-10} \text{ N} \approx 10^{-9} \text{ N}.$$

Můžeme si povšimnout, že síla mezi jablkem a Newtonem je velice malá. Pro porovnání, předmět o váze jednoho kilogramu musíme na Zemi zvedat vzhůru silou zhruba 10 N. Gravitační síla je vskutku nejslabší ze všech druhů sil, které v přírodě najdeme, přesto však cítíme její působení v případech velkých a těžkých těles – toto ještě uvidíme ve druhé podúloze.

2. Pro její řešení musíme vědět, že hmotnost Země je přibližně $M_z \doteq 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Také potřebujeme znát vzdálenost jablka od těžiště Země. Proto budeme považovat Zemi za kouli, která má těžiště ve svém středu, a tedy vzdálenost jablka a středu Země se rovná

$R \doteq 6,4 \cdot 10^6$ m. Dosadíme tyto veličiny opět do stejného vzorce, abychom vypočítali hledanou sílu F_{G2} :

$$F_{G2} = G \frac{mM_z}{R^2} \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{1}{(6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} \approx 1 \text{ N}.$$

Zjistili jsme tedy, že jablko na Zemi působí silou řádově jeden Newton a tou samou silou působí Země na jablko (gravitační působení je vždy oboustranné).

Dále potřebujeme vypočítat zrychlení, jakým se k sobě obě tělesa pohybují. Abychom postupovali v newtonovském duchu, měli bychom si určit, z jaké vztažné soustavy budeme pohyb pozorovat. Vybereme-li si například vztažnou soustavu spjatou s jablkem, pak se nám bude zdát, že jablko stojí a pohybuje se k němu Země. Dohodněme se tedy, že budeme uvažovat vztažnou soustavu neutrálního pozorovatele, který pozoruje, jak jablko padá k Zemi. Takový pozorovatel by nesměl stát na Zemi, jelikož by pak těžko poznal její pohyb. Uvažujme jej proto například v kosmu v beztížném stavu vůči Zemi tak, že před pádem jablka jsou pro něj Země i jablko v klidu. V takové soustavě může pozorovatel naměřit v průběhu pádu odpovídající pohyb oběma tělesům a zrychlení je možno určit podle postupu níže. K samotnému výpočtu zrychlení použijeme druhý Newtonův zákon, zákon síly. Ten můžeme vyjádřit následující rovnicí:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Za sílu F dosadíme F_G a za hmotnost m dosadíme hmotnost jablka, resp. Země. Dostaneme tedy výsledek pro jablko a Zemi:

$$a_j = G \frac{M_z}{R^2} \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \frac{6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} \doteq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$a_z = G \frac{m}{R^2} \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \frac{10^{-1} \text{ kg}}{(6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} \approx 10^{-25} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Vidíme, že síla působící na jablko od Země uděluje jablku zrychlení podobné známému tíhovému zrychlení $g \doteq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Skutečná hodnota této veličiny však také závisí na odstředivé síle vznikající rotací Země a působící jiným směrem než gravitační síla (na rovníku dokonce přesně opačným). Země se zase kvůli své velké hmotnosti skoro nepohybuje.

3. Opět začneme newtonovsky¹ a určíme si, jaké souřadnice budeme používat. Víme, že těžiště soustavy dvou jablek leží na jejich spojnici, takže nechť máme jednu souřadnicovou osu x procházející oběma jablky s bodem 0 na Zemi u prvního jablka a vzdáleností j ve výšce druhého jablka.

Dále víme, že polohu těžiště na spojnici určuje vážený průměr dílčích těžišť. Jelikož váha v průměru je hmotnost těles a obě tělesa váží stejně, leží těžiště soustavy jablek v aritmetickém průměru souřadnice x , čili ve výšce $j/2$ nad zemí.

¹Tento přístup, ač jsme ho nazvali newtonovský, se vyplatí používat u jednoduchých úloh téměř vždy.

V každém momentu se těžiště nachází v půlce mezi dvěma jablky – pokud horní jablko urazí vzdálenost l , pak se těžiště posune do vzdálenosti $j/2 - l/2$. To znamená, že těžiště urazí dvakrát menší vzdálenost než jablko v každý časový okamžik, a má tedy vždy poloviční rychlost. Poloviční nárůst rychlosti však v každém okamžiku odpovídá polovičnímu zrychlení, než má horní jablko, tedy $g/2$.

Jindřich Dušek

`jindra@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.