Úloha I.E ... Po stopách Sherlocka

7 bodů; (chybí statistiky)

Je známo, že Sherlock Holmes věřil v nedoceněnou informační hodnotu chůze člověka. Ze stop zanechaných ve sněhu či bahně dokázal vydedukovat způsob chůze, postavu či výšku člověka. V úloze prozkoumáme možnosti těchto metod připodobněním nohou k jednoduchému fyzikálnímu modelu kyvadla.

1. *Naměřte závislost frekvence kroků na délce nohy člověka, který kráčí sobě nejpřirozenějším způsobem.[1] Délku měřte vždy např. od kyčle až na zem, měření proveďte pro alespoň 4 různé délky nohy[2] a vyneste do grafu.*
2. *Najděte si, jaký vztah platí mezi frekvencí kyvů[3] a délkou tzv. matematického kyvadla. Ukažte, zda a jak tato závislost odpovídá naměřeným hodnotám.*

Od ostatních experimentálních úloh se tato liší tím, že nás nutí vyjít ven a požádat další lidi o spolupráci na měření. Aby byla naměřená závislost pozorovatelná, je žádoucí získat údaje nejen od většího množství lidí, ale také většího rozpětí jejich výšek.

V úloze budeme používat experimentální symboliku a postupy, které ve zjednodušené verzi najdete blíže popsané v našem shrnutí experimentální metodiky na našem webu.[4]

Experiment

V našem případě máme měření od 5 našich organizátorů za shodných podmínek.[5] Délky nohy l_i, kde indexem i rozlišujeme jednotlivé organizátory, jsme měřili právě vždy od kyčle až na zem naboso (přesněji od výšky, kde je stehenní kost pod kůží nejblíže, což je přibližně výška kyčelního kloubu) s odhadovanou systematickou nejistotou $u_{l_\mathrm{i}} = 1\,\mathrm{cm}$. Abychom zvýšili přesnost měření periody jednoho kroku, naměřili jsme třikrát celkový čas t_i ze 7 po sobě jdoucích kroků,[6] jehož průměr jsme pak podělili 7, abychom dostali čas jednoho kroku T_i s menší nejistotou. Tu zde tvořil převážně reakční čas, který odhadněme na $u_{t_\mathrm{i}} = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Výsledky měření přepíšeme do tabulky 1 a k nim přidáme také dopočtené frekvence a jejich nejistoty podle vztahů:

$$f_\mathrm{i} = \frac{1}{T_\mathrm{i}}\,,$$
$$u_{f_\mathrm{i}} = \frac{u_{T_\mathrm{i}}}{\langle T_\mathrm{i}\rangle}\cdot\langle f_i\rangle\,,$$

přičemž druhý si můžete odvodit na základě pravidel v naučném textu textu.[7] Hodnoty $\langle T_\mathrm{i}\rangle$ a $\langle f_i\rangle$ značí konkrétní naměřenou hodnotu bez uvažování nejistoty (protože je zvykem označovat

[1] Může jít i o již hotové záznamy lidské chůze.

[2] Tedy čtyři různé lidi. ;)

[3] Jeden kyv počítáme přirozeně jako dobu mezi dvěma průchody kyvadla jedním bodem za pohybu stejným směrem. Může tedy jít i o čas mezi dvěma průchody stejnou maximální výchylkou.

[4] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/jak_resit/tahak.pdf`

[5] Myšleno tak, že měření bylo u každého provedeno stejně, byly měřeny stejné rozměry a každý měl vykonat to samé – ujít určitý počet kroků sobě nejpřirozenější rychlostí.

[6] Počet 7 kroků se může zdát zvláštní, ale měření se prováděla vždy na jiném místě. Aby všechny údaje vycházely ze stejných podmínek, bylo třeba se omezit na takový počet kroků, který bylo možno rovně ujít v každé místnosti.

[7] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/jak_resit/hokus_pokus#zpracovani_dat`

samostatnou značkou bez závorek celý výsledek měření ± nejistota). Později v textu i grafu využijeme hodnoty polovičních frekvencí a polovičních délek, které jsou rovněž v tabulce.

Tab. 1: Výsledky měření, seřazené vzestupně v l_i a její polovině. V posledním sloupci jsou dopočtené frekvence a jejich poloviční hodnoty. Všechna t_i mají nejistotu 0,20 s a u T_i je to 0,03 s; pro l_i platí výše zmíněná nejistota 1 cm.

Měření	$\langle l_\mathrm{i}\rangle$; $\langle l_\mathrm{i}/2\rangle$ [cm]	$\langle t_\mathrm{i}\rangle$ [s]	$\langle T_\mathrm{i}\rangle = \langle t_\mathrm{i}\rangle/7$ [s]	f_i [Hz]	$f_\mathrm{i}/2$ [Hz]
1	84; 42	3,65	0,52	$1{,}92 \pm 0{,}11$	$0{,}96 \pm 0{,}06$
2	86; 43	4,15	0,59	$1{,}69 \pm 0{,}11$	$0{,}85 \pm 0{,}06$
3	89; 45	4,43	0,63	$1{,}59 \pm 0{,}08$	$0{,}80 \pm 0{,}04$
4	91; 46	3,85	0,55	$1{,}82 \pm 0{,}10$	$0{,}91 \pm 0{,}05$
5	96; 48	4,73	0,68	$1{,}47 \pm 0{,}06$	$0{,}74 \pm 0{,}03$

O kyvadle

Matematické kyvadlo je jednoduchá soustava tvořená hmotným bodem, který je zavěšený na dlouhém nehmotném tuhém závěsu. Jinými slovy jde o zjednodušenou představu (fyzikální model) kyvadla, ve kterém je závaží mnohem těžší než závěs a které se navíc kývá jen málo (často se zmiňuje maximální vychýlení 5°, i když to přesně záleží na konkrétní úloze).[8] Kývá-li se v homogenním gravitačním poli, platí pro jeho periodu dostatečně přesný vztah:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

kde l je délka závěsu a g je gravitační zrychlení. Když si vzpomeneme, že mezi periodou a frekvencí platí $T = 1/f$, můžeme vztah upravit na závislost mezi frekvencí a délkou:

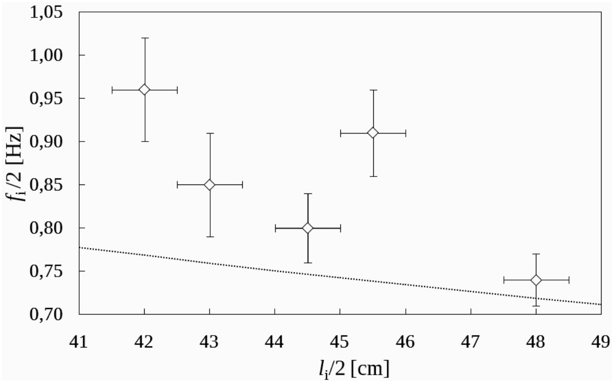
$$f = \frac{C}{\sqrt{l}}\,,$$

kde konstanta $C = \sqrt{g}/(2\pi)$ má při typickém tíhovém zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a délkách naměřených v cm hodnotu: $C \doteq 4{,}98\,\mathrm{cm^{1/2}{\cdot}s^{-1}}$.

Pokud chceme připodobnit nohy k matematickému kyvadlu, musíme uvažovat, že perioda jednoho kroku odpovídá *polovině periody* modelového kyvadla, protože čas měříme od zvednutí jedné nohy po její opětovné položení, ale už ne čas, během kterého se dostane za nohu druhou. U kyvadla naopak jako periodu měříme součet času dopředného a zpětného pohybu. To znamená, že frekvence chůze musí být proti kyvadlu poloviční. Proto jsme také do tabulky 1 přidali sloupec polovičních frekvencí. Obdobně musíme uvažovat *polovinu délky* nohy, protože ta má své těžiště mnohem blíže ke své polovině. U matematického kyvadla je vzdálenost mezi upevněním a těžištěm, které je v onom hmotném bodu, shodná s jeho celou, fyzikálně důležitou délkou.

[8] `http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/205-matematicke-kyvadlo`

Fyzikální porovnání modelu kyvadla a lidské chůze bude spočívat v grafickém/numerickém porovnání závislosti dané vztahem výše s naměřenými hodnotami. Vynesme si tedy do grafu (obr. 1) naměřené body $f_i/2$ v závislosti na $l_i/2$ a úsečkami kolem datových bodů znázorněme rozpětí dané jejich nejistotami (horizontální úsečky pro rozpětí v l_i a vertikální pro rozpětí v $f_i/2$). Tyto body ještě proložíme křivkou závislosti pro matematické kyvadlo, pro nějž budeme dosazovat jako délku l právě $l_i/2$ a frekvenci f budeme vynášet na osu $f_i/2$.



Obr. 1: Naměřené hodnoty spolu se zakreslenou závislostí pro matematické kyvadlo $C \doteq 4{,}98\,\mathrm{cm}^{1/2}{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$.

Diskuze

Prvním pozorováním je nutnost naměřit mnohem větší množství lidí, abychom mohli nějakou závislost pozorovat, a také že někteří se od hledaného trendu značně odchylují (o více než nejistotu měření), což znamená, že jednoduché kyvadlo není úplně vhodný model chůze.[9]

Dalším pozorováním je, že ani v jednom případě se chůze nepřibližuje volně zavěšenému matematickému kyvadlu, protože konstanta C by musela být ještě zhruba o osminu větší, aby křivka procházela alespoň chybovými úsečkami více naměřených bodů. Je však uspokojivé, že měření není od kyvadla vzdáleno řádově jinde a ve více případech dodržuje viditelné klesání.

Daniel Slezák
`dans@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[9] V teorii robotů se používají například modely založené na dvojitém kyvadlu, tedy že druhé kyvadlo je zavěšeno na závaží prvního a může se kývat nezávisle. To se více blíží stavbě nohy, ve které koleno spojuje dvě volně pohyblivé části stehna a lýtka-holeně.