

Úloha I.5 ... Bratříčku, zavírej vrátka

6 bodů; (chybí statistiky)

Dan musí po svém nepořádném bratrovi neustále zavírat vrata do domu, která nechává otevřená na celých 180° . Vrata mají hmotnost m a šířku r . Otáčejí se kolem svislé osy procházející panty s malým poloměrem r_p , na kterých se třou s koeficientem f (vrata se nedotýkají země).

1. Protože Dana už zavírání unavuje, chce je zavřít s vynaložením co nejmenší práce. Jaká je tato práce, působí-li na vrata celou dobu na místě v nejdelší možné vzdálenosti od pantů?
2. Jindy to zase Dan chce mít rychle za sebou. Kinetická energie otáčejících se vrat je $m\omega^2 r^2/6$, kde ω je úhlová rychlost. Na jakou úhlovou rychlost ω musí na začátku dveře urychlit, aby se samy zavřely, ale přitom nepráskly, tj. zastavily se přesně po 180° ?
3. Vzácně je ale Dan i našťvaný. Jednou s vraty švihl tak silně, že při nárazu ztratily jen 50% energie, kterou v tom okamžiku měly, se zbytkem se odrazily a bez dalšího kontaktu o stěnu se opět samy otevřely na původních 180° . Jaká musela být počáteční úhlová rychlost v tomto případě?

1. Jak víme z definice, práce je součin síly a dráhy, po kterou tato síla působí:

$$W = Fs.$$

Veškerá Danem vykonaná práce se v tomto případě spotřebuje v pantech, nás tedy bude zajímat dráha dveří okolo nich a síla, kterou dveře na tuto osu otáčení působí. Ty na pantech visí celou svou vahou, takže kolmá síla na ně působící je rovna tíze dveří, $F = mg$. Jelikož obě části mají koeficient tření f , síla, kterou musí Dan v pantech překonat, je $F = mgf$. Dveře se v rámu při této konstantní síle musí otočit o 180° , což můžeme vyjádřit pomocí obloukové míry jako π rad a uražená dráha je $s = \varphi r = \pi r_p$, polovina délky kruhu, jelikož dveře vskutku opsaly půlkruh. Z toho můžeme vypočítat celkovou vykonanou práci

$$W = \pi mgf r_p.$$

Alternativní řešení: práci vykonanou při otáčivém pohybu můžeme vyjádřit jako součin působícího momentu síly M^1 a úhlu α , o který se těleso otočilo. Na dveře při pohybu působí v pantech síla $F = mgf$, která má moment $M = mgf r_p$. Tu musí Dan překonávat silou s totožným momentem. Úhel otočení je $180^\circ = \pi$ rad, z čehož dosazením získáme stejné vyjádření práce jako v předchozím případě

$$W = M\alpha = M\varphi = \pi mgf r_p.$$

2. Aby dveře nepráskly a zastavily se přesně po 180° , musí mít v tomto okamžiku nulovou rychlost i kinetickou energii, proto je počáteční dodaná energie rovna práci potřebné k jejich zavření. Z předchozí části víme, že tato práce má velikost $W = \pi mgf r_p$, což

¹Při konstantním momentu síly.

je rovno velikosti počáteční kinetické energie, kterou vypočítáme ze vzorce $m\omega_0^2 r^2/6$, ze kterého můžeme vyjádřit počáteční úhlovou rychlost ω_0 .

$$\pi m g f r_p = \frac{m\omega_0^2 r^2}{6}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{6\pi g f r_p}}{r}$$

Aby dveře při zavírání spotřebovaly všechnu svou energii a nepráskly, Dan jim musel udělit počáteční úhlovou rychlost $\omega_0 = \sqrt{6\pi g f r_p}/r$.

3. Tentokrát se vrata nejprve zavírala a spotřebovávala energii, poté ji část ztratila nárazem, následně se opět otáčela a spotřebovávala energii, až se zastavila s nulovou energií v počátečním stavu. Pokud označíme práci, kterou dveře spotřebují k jednomu otočení o 180° jako W , pak po odrazu od zdi musely mít právě tuto energii. Pokud odrazem ztratily 50 % své aktuální energie, musely mít před ním energii dvojnásobnou, tedy $2W$. Při úvodním zavírání spotřebovala vrata rovněž energii W , tedy ve chvíli, kdy je Dan roztlačil, musela mít energii o velikosti $3W$. Vyjádřením velikosti této energie a porovnáním s počáteční kinetickou energií můžeme podobně jako v předchozím případě dojít k počáteční úhlové rychlosti ω_1 .

$$3\pi m g f r_p = \frac{m\omega_1^2 r^2}{6}$$

$$\omega_1 = \frac{3\sqrt{2\pi g f r_p}}{r}$$

Když byl Dan naštvaný a švihl vraty příliš silně, byla jejich počáteční úhlová rychlost $\omega_1 = 3\sqrt{2\pi g f r_p}/r$.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.