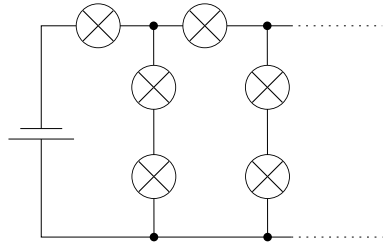


Úloha V.C ...

7 bodů; průměr 3,85; řešilo 27 studentů

Výfuček chce tentokrát vánoční světélka s dostatečným předstihem. Ví se, že je od přírody velmi šikovný, a proto se rozhodl si svá světélka svépomocí vyrobit. Nyní se nachází ve fázi, kdy má světélka už sice vyrobená, ale přemýšlí, jak je má vlastně zapojit všechny dohromady. Rozhodně nechce, aby mu z nich začaly létat jiskry a zkratem mu zapálily třeba stromeček! Ví, že každou jeho žárovíčkou má procházet proud v rozmezí 0,1–3 A a na každé z nich nesmí napětí přesáhnout hodnotu 10 V. Jeho žárovíčky mají odpor $10\ \Omega$ a k jejich napájení Výfuček používá ideální zdroj napětí $U = 25\ \text{V}$.



Obr. 1: R-2R síť se žárovíčkami

1. Výfuček přemýšlí, jestli zapojit všechny žárovíčky paralelně, nebo sériově. Jaké bude napětí na jednotlivých žárovíčkách a jaký jimi bude procházet proud v obou zapojeních, použije-li Výfuček pouze 5 žárovíček? Budou při některém z těchto zapojení žárovíčky svítit?
2. Výfuček však má žárovíček mnohem více, a tak přemýšlí o tom, kolik nejvíce a kolik nejméně jich může zapojit sériově. Pomozte mu a spočítejte proud a napětí pro n sériově zapojených žárovíček a určete, pro jaká n žárovíčky svítí.
3. Nakonec se ale rozhodl, že nejlepší bude žárovíčky zapojit do tzv. R-2R sítě, jejíž schéma vidíte na obrázku 1. Jaký je odpor této sítě, jestliže je nekonečná?
4. Výfuček s překvapením zjistil, že zapomněl na odpor drátů. Jaký je odpor celé nekonečné sítě, pokud dráty mají mezi každými dvěma uzly odpor $0,5\ \Omega$?

1. Když Výfuček zapojí 5 žárovíček sériově, bude jejich celkový odpor $R_s = 5 \cdot 10\ \Omega = 50\ \Omega$, tedy jimi dle Ohmova zákona poteče proud

$$I_s = \frac{U}{R_s} = \frac{25\ \text{V}}{50\ \Omega} = 0,5\ \text{A}.$$

Napětí na žárovíče opět spočítáme podle Ohmova zákona jako

$$U_s = I_s \cdot R = 0,5\ \text{A} \cdot 10\ \Omega = 5\ \text{V}.$$

U sériového zapojení je napětí na žárovíče pod maximálním povoleným napětím a proud v povoleném rozmezí, tedy žárovíčky budou bez problémů svítit. Nyní přepočítáme hodnoty pro paralelní zapojení. Při tomto zapojení je napětí všude stejné, tedy $U_p = 25\ \text{V}$, z čehož dopočítáme proud procházející každou žárovíčkou:

$$I_p = \frac{U_p}{R} = \frac{25\ \text{V}}{10\ \Omega} = 2,5\ \text{A}.$$

Pro toto zapojení je sice proud v povoleném rozmezí, ale napětí na žárovíčkách je větší než povolené. Proto Výfuček takto žárovíčky zapojit nemůže, neboť by je zničily.

2. Pokud zapojíme n žároveček sériově, bude se napětí dělit tak, aby celkový součet byl roven napětí zdroje. Na každé žárovce bude napětí $U_n = U/n$, neboť všechny žárovčky jsou stejné. Toto napětí musí být menší než 10 V , z čehož spočítáme minimální počet žároveček:

$$\begin{aligned}\frac{U}{n} &\leq 10\text{ V}, \\ n &\geq \frac{25\text{ V}}{10\text{ V}}, \\ n &\geq 2,5.\end{aligned}$$

Nyní ještě omezíme počet žároveček proudem. Proud, který prochází jednou žárovčkou, je $I_n = U/(nR)$, z čehož určíme nejprve maximální počet žároveček

$$\begin{aligned}\frac{U}{nR} &\geq 0,1\text{ A}, \\ n &\leq \frac{25\text{ V}}{10\ \Omega \cdot 0,1\text{ A}}, \\ n &\leq 25,\end{aligned}$$

a poté ještě jejich minimální počet plynoucí z omezení proudu

$$\begin{aligned}\frac{U}{nR} &\leq 3,0\text{ A}, \\ n &\geq \frac{25\text{ V}}{10\ \Omega \cdot 3,0\text{ A}}, \\ n &\geq 0,8\bar{3}.\end{aligned}$$

Abychom vyhověli oběma podmínkám, musíme použít ta „přísnější“ omezení. Navíc nezapomínejme, že žároveček může být použito pouze celočíselné množství. Proto, aby sériově zapojené žárovčky svítily, musí být zapojené nejméně tři a nesmí jich být zapojeno víc než 25.

3. Jak bylo řečeno ve Výfučtení, odpor sítě se nezmění přidáním jedné buňky na začátek, proto musí platit:

$$R_\infty = R + \frac{2R \cdot R_\infty}{2R + R_\infty}.$$

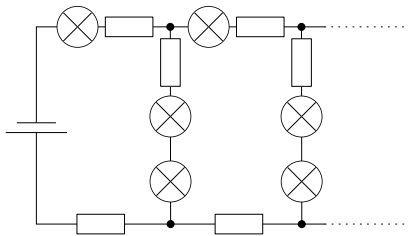
Úpravou získáme kvadratickou rovnici

$$R_\infty^2 - RR_\infty - 2R^2 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení, a to

$$R_\infty = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 8R^2}}{2}, \quad R_\infty = \frac{R \pm 3R}{2}.$$

Z této rovnice vidíme, že má dva kořeny, $R_\infty = -R$ a $R_\infty = 2R$. Jak ale jistě víme, odpor nemůže nabývat záporných hodnot, a proto první řešení nedává fyzikálně smysl. Tedy, tato nekonečná síť má celkový odpor $R_\infty = 2R$. V našem případě má Výfučkova R - $2R$ síť celkový odpor $R_\infty = 20\ \Omega$.



Obr. 2: R-2R síť s odpory drátů

4. Odpor drátů můžeme nahradit rezistory o odporu $0,5\ \Omega$, čímž se nám R-2R síť změní do tvaru, který vidíme na obrázku 2.

K výpočtu použijeme opět princip přidání další buňky k nekonečné síti beze změny odporu, čímž získáme rovnici

$$R_\infty = (R + R_d) + \frac{(2R + R_d) \cdot R_\infty}{(2R + R_d) + R_\infty} + R_d,$$

$$R_\infty^2 - (R + 2R_d)R_\infty - 2R^2 - 5RR_d - 2R_d^2 = 0.$$

Tuto rovnici neumíme rozumně obecně vyřešit, a proto dosadíme hodnoty ze zadání $R = 10\ \Omega$ a $R_d = 0,5\ \Omega$ a rovnici vyřešíme číselně. Dostáváme opět dvě řešení, tentokrát $R_\infty = -10,5\ \Omega$ a $R_\infty = 21,5\ \Omega$, a opět vidíme, že první řešení je fyzikálně nesmyslné.

Se započtením odporu drátů je tedy odpor celé sítě přibližně $21,5\ \Omega$.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.