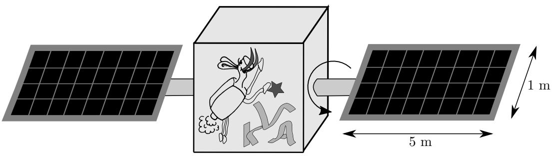
## Úloha V.5 ... Družice

7 bodů; průměr 3,72; řešilo 18 studentů

*Výfučí Kosmická Agentura (VKA) se rozhodla vyslat do vesmíru svoji první sondu, která má ověřit nové technologie k návrhu druhé sondy. Mise druhé sondy už má směřovat k Marsu s cílem prozkoumat zde možnosti založení prvního trvale osídleného města. Při výzkumu za účelem splnění tohoto cíle se ukázalo, že největší problém dělá napájení družic.*

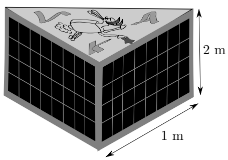
1. *Astronomové zjistili, že výkon Slunce je* $3{,}8 \cdot 10^{26}$ W *a že je vyzařován rovnoměrně do všech směrů.*[1] *Jaký je výkon slunečního záření na metr čtvereční v blízkosti Země? Vzdálenost Země–Slunce je* $150 \cdot 10^6$ km.

2. *Konstruktéři z VKA se rozhodli první sondu Výfučkomut 1 napájet pomocí solárních panelů. Ty jsou obdélníkového tvaru o rozměrech* $5\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ *a mohou se natáčet podle osy rovnoběžné se svojí delší stranou, viz obrázek 1. Jaký výkon budou panely dodávat Výfučkomutovi 1, bude-li na ně sluneční záření dopadat po úhlem* $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ *a* $0^\circ$, *a jejich účinnost je* $\eta = 20\,\%$?




Obr. 1: Výfučkomut 1

3. *Z mise Výfučkomuta 1 se konstruktéři poučili, a proto pro misi k Marsu postavili Výfučkomut 2 – sondu ve tvaru pravidelného trojbokého hranolu o hraně* $1\,\mathrm{m}$ *a výšce* $2\,\mathrm{m}$, *viz obrázek 2. Na rozdíl od první má tato solární panely (stejné účinnosti) na všech třech bočních stěnách, přičemž bude udržovat osu (tu, která prochází podstavami) kolmou na rovinu oběhu kolem Slunce. Při jakém natočení vůči Slunci má tehdy sonda nejmenší příkon?*




Obr. 2: Výfučkomut 2

*Konstruktéři chtěli zjistit, jestli i při tomto minimálním výkonu sonda může přežít, než se ze Země dostane na Mars. Pomozte jim a spočítejte, v jaké vzdálenosti od Slunce může sonda nejdále pracovat, pokud k fungování potřebuje stálý příkon* $200\,\mathrm{W}$? *Zvládne tedy cestu na Mars z energetického hlediska? Mars je od Slunce vzdálen zhruba* $228 \cdot 10^6$ km.

[1] Tento děj si můžeme představit jako děj velmi podobný tomu, kdy je vyzařováno světlo z žárovky.

1. Výkon slunečního záření na metr čtvereční bývá označován jako solární konstanta a značen $K$. Výkon Slunce označíme $P_\mathrm{S}$ a střední vzdálenost Slunce–Země $r_\mathrm{Z}$. Můžeme si představit, že výkon Slunce se rovnoměrně rozprostře po povrchu koule, která má poloměr $r_\mathrm{Z}$. Solární konstanta je vztažena na jeden metr čtvereční, tudíž si musíme z této koule vybrat pouze plošku o tomto obsahu. Solární konstantu budeme tedy počítat podle následujícího vzorce:
$$K = \frac{P_\mathrm{S}}{4\pi r_\mathrm{Z}^2}. \tag{1}$$
Po dosazení příslušných hodnot dostaneme hodnotu solární konstanty $K = 1\,344\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

2. Nyní máme za úkol spočítat výkon, který budou dodávat panely naší sondě. Nejprve je nutné si ujasnit, kde máme hledat úhly, pro které tento výkon počítat. Úhel dopadu, který budeme uvažovat, se počítá od kolmice na plochu, kam záření dopadá. Z tohoto faktu vyplývá, že námi uvažovaný výkon budeme počítat pomocí následujícího vzorce
$$P_\alpha = KS\eta\cos\alpha\,,$$
kde $K$ je již spočítaná solární konstanta, $S = 10\,\mathrm{m^2}$ je povrch solárních panelů, $\eta = 20\,\%$ je jejich účinnost a $\alpha$ je úhel, pod kterým záření dopadá. Pokud bychom dopadající paprsky rozložili na složku kolmou k panelům a složku rovnoběžnou s panely (což můžeme udělat a na výsledku se nic nezmění), bude výkon stejný, jako kdyby dopadaly pouze tyto kolmé paprsky. Funkce kosinus (cos) vyjadřuje, jaká část paprsků dopadá při úhlu $\alpha$ kolmo k panelu. Pro vypočtení výkonu stačí výsledek vynásobit hodnotou $\cos\alpha$.

   Pro $\alpha = 0^\circ$ víme, že kosinus je roven 1 a účinnost panelů je $20\,\%$, tudíž výkon solárních panelů při kolmém dopadu záření bude $P_0 = 2\,688\,\mathrm{W}$. Dále je velmi snadné vypočítat výkon panelů, pokud záření bude dopadat pod úhlem $\alpha = 90^\circ$. Takové záření bude dopadat rovnoběžně s rovinou panelu, tudíž nebude předávat vůbec žádnou energii, matematicky zapsáno $P_{90} = 0\,\mathrm{W}$. Pro úhel $\alpha = 30^\circ$ je cosinus roven $\sqrt{3}/2$ a výsledný výkon panelů je $P_{30} \doteq 2\,328\,\mathrm{W}$. Pokud záření dopadá pod úhlem $\alpha = 60^\circ$, je kosinus roven $1/2$ a výkon solárních panelů sondy bude $P_{60} = 1\,344\,\mathrm{W}$. Všechny tyto úvahy by šly provést pouze geometricky s tím, že bychom kosinus nahradili poměrem „užitečných paprsků“ v celkovém množství paprsků. Kosinus zde můžeme pochopit dále i jako funkci, která vypočítá průmět panelu (natočeného o nějaký úhel $\alpha$) do námi zvolené roviny.

3. Nejprve budeme chtít zjistit, při jakém natočení je výkon sondy Výfučkomut 2 nejmenší. Jak jsme ukázali v předchozím úkolu, důležitá je velikost průmětu plochy do roviny, na níž dopadají paprsky pod úhlem dopadu $0^\circ$. Výfučkomut 2 má solární panely po celém svém obvodu, a proto tedy hledáme nejmenší možný průmět rovnostranného trojúhelníka. Předpokládejme, že sonda je natočená tak, že paprsky dopadají kolmo k jednomu ze solárních panelů. V takovém případě je efektivní plocha rovna celé jedné straně. Budeme-li sondou otáčet, tato plocha se bude zmenšovat do té doby, než paprsky budou dopadat rovnoběžně s jedním z panelů. Tehdy je efektivní plocha daná výškou rovnostranného trojúhelníka, který tvoří podstavu sondy. Pokud budeme sondu nadále otáčet, efektivní plocha se bude opět zvětšovat, až dosáhne svého maxima. Všimněte si, že v pozici, kde je efektivní plocha daná průmětem rovnostranného trojúhelníka, se po pootočení libovolným směrem efektivní plocha zvýší. Přesně kvůli tomuto můžeme tvrdit, že je to minimum. Přesnější matematické odvození by bylo příliš složité, proto si vystačíme s takovýmto řešením pomocí intuice.

Nejmenšího příkonu solárních panelů tedy dosáhneme, pokud budou paprsky rovnoběžné s jedním z panelů, a tedy na druhý budou dopadat pod úhlem 30°.

Dále si musíme vypočítat solární konstantu v okolí Marsu, kterou budeme značit $K_\mathrm{M}$ a spočítáme ji stejně jako solární konstantu pro Zemi $K$. Jen místo vzdálenosti Slunce–Země budeme uvažovat vzdálenost Slunce–Mars, která je rovna $r_\mathrm{M} \doteq 228 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Po dosazení do vzorce (1) získáme hodnotu $K_\mathrm{M} \doteq 582\,\mathrm{W/m^2}$.

Nyní vypočítáme nejmenší výkon solárních panelů Výfučkomuta 2 a rozhodneme, jestli to bude stačit na udržení sondy v chodu. Minimální výkon sondy $P_\mathrm{min}$ budeme počítat pomocí vzorce, který je stejný jako ten použitý ve druhém úkolu až na hodnotu solární konstanty. Tedy

$$P_\mathrm{min} = K_\mathrm{M} S_2 \eta \cos 30^\circ \,,$$

kde $K_\mathrm{M}$ je solární konstanta pro Mars, $S_2$ je plocha jednoho panelu Výfučkomuta 2, která je rovna $2\,\mathrm{m^2}$, a $\eta$ je účinnost solárních panelů, která zůstává stejná. Po dosazení všech hodnot zjišťujeme, že minimální výkon sondy u Marsu bude $P_\mathrm{min} \doteq 201{,}6\,\mathrm{W}$, což je dostatečné na udržení sondy v chodu. Maximální možnou vzdálenost $r_\mathrm{max}$, ve které bude sonda ještě moci pracovat, tedy panely budou mít výkon $P_\mathrm{max} = 200\,\mathrm{W}$, vypočítáme tak, že do vzorce pro výkon solárních panelů dosadíme obecný vztah pro výpočet solární konstanty (1). Dostáváme

$$P_\mathrm{min} = \frac{P_\mathrm{S}}{4\pi r_\mathrm{max}^2} S_2 \eta \cos 30^\circ \,,$$

ze které si vyjádříme $r_\mathrm{max}$ jako

$$r_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{P_\mathrm{S}}{4\pi P_\mathrm{min}} S_2 \eta \cos 30^\circ} \,.$$

Po dosazení hodnot zjišťujeme, že $r_\mathrm{max} \doteq 229 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Sonda tedy cestu k Marsu z hlediska výkonu solárních panelů určitě zvládne, ba co víc, může letět ještě o milion kilometrů dál.

***Klára Stefanová***
klarka@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.