Úloha V.4 ... Vyhlídkový let

6 bodů; průměr 5,17; řešilo 23 studentů

Organizátoři Výfuku se rozhodli pro víkendový výlet v horkovzdušném balónu. Jako fyzici věří, že ho zvládnou uřídit sami, jenže právě teď nechtěně zrychleně klesají. Nenafouknutý balón i s nákladem váží $m_\mathrm{B} = 400\,\mathrm{kg}$, nafouknutý má tvar koule s poloměrem $R = 8\,\mathrm{m}$. Jde o typický balón s hořákem, který může vyměňovat vzduch s okolím (okolní vzduch má tlak $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$ a hustotu $\varrho_\mathrm{vz} = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$). Na jakou teplotu T musí organizátoři hořákem zahřát vzduch v balónu, aby zastavili zrychlování směrem dolů? Mezi hustotou vzduchu v balónu a jeho teplotou platí vztah $\varrho = k \cdot p/T$, kde $k \doteq 3{,}37 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}K{\cdot}m^{-3}{\cdot}Pa^{-1}}$ a T je teplota v kelvinech.

Zrychlování balónu směrem dolů se zastaví, pokud bude výslednice sil na něj působících nulová. Na balón ale působí pouze dvě síly, vztlaková síla F_vz směrem nahoru a tíhová síla F_G směrem dolů. Výslednice sil působících na balón proto bude nulová právě tehdy, když se bude gravitační síla rovnat vztlakové. Zvýšení teploty uvnitř balónu způsobí zvětšení objemu vzduchu v něm, a jelikož je objem balónu konstantní, část vzduchu unikne, a zmenší se tak tíhová síla.

Pro vztlakovou sílu platí vztah $F_\mathrm{vz} = V\varrho_\mathrm{vz}g$. Gravitační síla je pak součinem gravitačního zrychlení a hmotnosti balónu m_B včetně hmotnosti vzduchu v něm m_A:

$$V\varrho_\mathrm{vz}g = (m_A + m_B)g\,.$$

Rovnici můžeme vydělit tíhovým zrychlením. Dalšími úpravami se budeme snažit dosáhnout tvaru, ve kterém budeme znát vše až na teplotu T, jejíž hodnotu chceme zjistit. Začneme dosazením za objem balónu V. Balón má tvar koule, jejíž objem je možné vyjádřit v závislosti na poloměru R jako $V = (4/3) \cdot \pi R^3$. Po provedení těchto úprav vypadá náš vztah následovně:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_\mathrm{vz} = m_A + m_B\,.$$

Stále ještě neznáme hmotnost vzduchu v balónu. Známe ale jeho objem a jsme schopni spočítat jeho hustotu. Pomůžeme si vzorcem uvedeným v zadání a hledanou hmotnost si vyjádříme nejprve dosazením za objem balónu, a pak za hustotu vzduchu v něm:

$$m_A = V\varrho = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{kp}{T}\,.$$

Teď už dokážeme vyjádřit i poslední neznámou pomocí nám známých hodnot, stačí si jen rozepsat výchozí vztah a vyjádřit z něj teplotu T:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_\mathrm{vz} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{kp}{T} + m_B\,,$$

$$T = \frac{4\pi R^3 kp}{4\pi R^3 \varrho_\mathrm{vz} - 3m_B}\,.$$

Získali jsme obecný vztah, pokud do něj dosadíme konkrétní hodnoty ze zadání, dozvíme se hledanou hodnotu teploty T:

$$T = \frac{4\pi \cdot (8\,\mathrm{m})^3 \cdot 3{,}37 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}K{\cdot}m^{-3}{\cdot}Pa^{-1}} \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{4\pi \cdot (8\,\mathrm{m})^3 \cdot 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} - 3 \cdot 400\,\mathrm{kg}} \doteq 332{,}5\,\mathrm{K}\,.$$

Zjistili jsme, že organizátoři musí za daných podmínek ohřát vzduch na teplotu asi 333 K, tedy přibližně 60 °C.

Viktor Materna

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.