

## Úloha V.3 ... Kapesné

6 bodů; průměr 4,08; řešilo 39 studentů

Pavla zjistila, že jí stávající výše jejího kapesného nestačí. Rozhodla se, že každý rok na Silvestra (31. 12.) projde Prahou a sesbírá peníze, které lidé poztráceli. Podle jejího odhadu každý den upustí na zem jednu korunu 0,1% (tzn. jedno promile) obyvatel Prahy, v níž žije konstantní počet 1 milion lidí. Pavla sbírá ztracené koruny pouze jediný den v roce, a proto dokáže sesbírat pouze 5% z celkového obnosu peněz, který leží na zemi. Předpokládejme, že na chodnicích na začátku roku 2018 neležela jediná ztracená mince. Pavla šla poprvé sbírat ztracené mince na konci roku 2018, tedy 31. 12. 2018, a nikdo jiný než ona peníze ze země nesbírá. Kolik peněz Pavla nasbírá za 5 let? Uvažujte, že jsou všechny roky dlouhé 365 dní.

K vyřešení tohoto problému můžeme využít buď funkcí tabulkového kalkulátoru, jako je například MS Excel, nebo můžeme tento problém počítat ručně. My se zde budeme zabírat druhým způsobem. Příklad si můžeme rozdělit na pět výpočtů a finální součet, kde každým výpočtem zjistíme, jaký obnos peněz získá každý rok.

Nejdříve potřebujeme zjistit, kolik peněz poztrácí obyvatelé Prahy za jeden rok. Ze zadání víme, že každý den ztratí jednu korunu 0,1% z 1 milionu obyvatel. Za rok tedy Pražané tímto způsobem ztratí  $r_{z1} = 365\,000$  Kč. Pokud tedy Pavla sebere 5% z této částky, po prvním roce bude mít v kapse (metaforicky)  $r_1 = 18\,250$  Kč.

Druhý rok to bude o něco složitější. Na ulicích nebude pouze roční ztráta Pražanů  $r_z$ , ale i mince zbylé z minulého roku. Jejich počet se rovná rozdílu roční ztráty  $r_z$  a sebranému obnosu za první rok  $r_1$ . Na zemi tedy bude ležet při druhém sběru

$$r_{z2} = 365\,000 + (365\,000 - 18\,250) = 711\,750 \text{ Kč}.$$

Pavla z tohoto obnosu znovu sebere pouhých 5%, tedy  $r_2 \doteq 35\,588$  Kč<sup>1</sup>

Sběr ve třetím roce bude založen na stejném principu. Na zemi budou mince z předešlých let a nové, které byly ztraceny ve třetím roce. Na zemi tedy budou mince v hodnotě

$$r_{z3} = 365\,000 + (711\,750 - 35\,588) = 1\,041\,162 \text{ Kč}.$$

Třetí rok tedy Pavla získá  $r_3 \doteq 52\,058$  Kč.

Čtvrtý a pátý rok probíhá také stejně, a proto

$$\begin{aligned} r_{z4} &= 365\,000 + (1\,041\,162 - 52\,058) = 1\,354\,104 \text{ Kč}, \\ r_4 &\doteq 67\,705 \text{ Kč}, \\ r_{z5} &= 365\,000 + (1\,354\,104 - 67\,705) = 1\,651\,399 \text{ Kč}, \\ r_5 &\doteq 82\,570 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Nyní již jednoduše spočteme, kolik Pavla za pět let nasbírala

$$\begin{aligned} x &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = \\ &= (18\,250 + 35\,588 + 52\,058 + 67\,705 + 82\,570) \text{ Kč} = 256\,171 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Pavla si tímto způsobem vydělala asi 256 171 Kč.

<sup>1</sup>Na několika místech, kde se nachází desetinné číslo, dochází k zaokrouhlení, protože logicky nemůžete sebrat polovinu nebo šestinu mince.

Takto jsme však úlohu vyřešili celkem hrubou silou. Jistě uznáte, že toto řešení není moc elegantní, a kdyby Pavla mince sbírala třeba 20 let, výpočet tímto způsobem by byl značně složitý. Proto si nyní představíme ještě jednu elegantnější metodu výpočtu.

Využijeme velmi jednoduchého triku – nebudeme přímo počítat, kolik peněz Pavla sebrala, ale kolik peněz leží v Praze na zemi. Sumu, kterou Pavla sesbírala pak jednoduše zjistíme jako rozdíl této částky a částky, kterou Pražané poztráceli.

Označme  $r_z$  částku, kterou Pražané ztratí za jeden rok, a protože v ulicích zůstane ležet 95% všech ztracených peněz poté, co je jde Pavla na Silvestra sbírat, zůstane v ulicích po prvním roce

$$z_1 = 0,95r_z .$$

K této částce se přidá dalších ztracených  $r_z$  korun, a proto po druhém roce na zemi bude ležet

$$z_2 = 0,95 \cdot (0,95r_z + r_z) .$$

Obdobně, po třetím roce to bude

$$z_3 = 0,95 \cdot (0,95 \cdot (0,95r_z + r_z) + r_z) .$$

Takhle bychom mohli pokračovat dál každý rok, ale pokud tyto výrazy upravíme roznásobením, zjistíme, že

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,95r_z , \\ z_2 &= 0,95^2 r_z + 0,95r_z , \\ z_3 &= 0,95^3 r_z + 0,95^2 r_z + 0,95r_z . \end{aligned}$$

Jinými slovy z peněz ztracených v prvním roce si Pavla během  $n$  let bere  $n$ -krát (zůstane tedy pouze  $0,95^n r_z$ ), z peněz ztracených ve druhém roce si bere  $(n-1)$ -krát (zůstane tedy  $0,95^{n-1} r_z$ ), a tak dále, až z peněz ztracených v  $n$ -tém roce si bere pouze jednou (zbude z nich tedy  $0,95r_z$ ). Celkem se ztratí za  $n$  let  $n \cdot r_z$  peněz, a proto Pavla za tu dobu posbírá

$$x = n \cdot r_z - 0,95^n r_z - 0,95^{n-1} r_z - \dots - 0,95r_z .$$

Matematici vymysleli způsob, jak podobné opakující se operace zapsat lépe. Používá se k tomu tzv. suma, a pokud z předchozího výrazu vytkneme  $r_z$ , můžeme ho pak zapsat a následně dosadit náš případ  $n = 5$  jako

$$x = r_z \left( n - \sum_{i=1}^n 0,95^i \right) = r_z \left( 5 - \sum_{i=1}^5 0,95^i \right) .$$

Ke správnému řešení se lze dobrat (nejen) všemi třemi způsoby a je pouze na vás, jaký z nich zvolíte. Ono správné řešení tedy je, že Pavla za 5 let sesbírala 256 171 Kč.

*Miroslav Jarý*

Jason@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.