Úloha V.2 ... Babylonská

6 bodů; průměr 4,16; řešilo 25 studentů

Chceme-li vyjádřit některá čísla dostatečně přesně, musíme využít v desítkové soustavě mnoho cifer. Hodně jich ale ušetříme, použijeme-li šedesátkovou soustavu. V této soustavě počítali například staří Babyloňané. Zapište na tři „šedesátinná“ místa čísla $\sqrt{2}$ *a* π *a zjistěte, na kolik desetinných míst v desítkové soustavě jsou takto zapsaná čísla přesná.*

Nápověda: *Šedesátková soustava používá místo přechodu přes desítku přechod až přes šedesátku. Správně bychom potřebovali šedesát různých číslic, avšak uvědomíme-li si, že desetinná čísla můžeme zapsat i ve formě zlomků, na příklad* $2{,}34 = 2 + 3/10 + 4/10^2$, *můžeme obdobným způsobem zapisovat čísla v šedesátkové soustavě s využitím klasických číslic – ve jmenovatelích zlomků se budou vyskytovat mocniny* 60 *udávající „šedesátinná“ místa a čitatelé budou moci nabývat šedesáti různých „čísel“ v rozsahu 0–59. Můžete si například ověřit, že desítkové číslo* 3,56 *se dá zapsat* 3;33,36 *jako šedesátkové, kde čárkou oddělujeme šedesátkové číslice a středníkem nahrazujeme „šedesátinnou čárku“.*

Abychom převedli $\sqrt{2}$ do šedesátkové soustavy, nejprve se podíváme, jaká je nejvyšší mocnina 60, která je menší než $\sqrt{2}$. Bez dlouhého bádání bychom měli dojít k závěru, že největší celé n, které splňuje

$$60^n \leq \sqrt{2}\,,$$

je 0, protože pro libovolné číslo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí, že $x^0 = 1$. Zároveň je zřejmé, že v $\sqrt{2}$ se nachází pouze jednou. Odmocnina ze dvou tedy v šedesátkové soustavě začíná jako 1. Nyní ji odečteme od $\sqrt{2}$, abychom dostali zbytek, který není popsán, mohli proces opakovat a zjistit další cifry.

$$\sqrt{2} - 1 = 0{,}414\,21\ldots$$

Protože nám nevyšla nula, nevyjádřili jsme ještě celé číslo a musíme ho upřesnit více číslicemi. Dále tedy vyjádříme, kolikrát se do našeho čísla vejde o jedna menší mocnina šedesátky 60^{-1}, neboli jaká cifra bude na prvním „šedesátinném místě“. Pro připomenutí uvedeme vztah pro práci s mocninami

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}\,.$$

Nyní tedy hledáme, kolikrát se číslo 60^{-1} vejde do zbytku $0{,}414\,21\ldots$ Toto lze snadno určit tím, že zbytek vydělíme mocninou šedesátky, se kterou právě pracujeme, tentokrát 60^{-1}, a výsledek zaokrouhlíme dolů. Dostáváme

$$\frac{0{,}414\,21\ldots}{60^{-1}} = 60 \cdot 0{,}414\,21\ldots = 24{,}85\ldots\,,$$

a protože hledáme největší celočíselný násobek, dostáváme 24. Na prvním „šedesátinném“ místě bude tedy 24. Nyní opět zjistíme, jaký je zbytek

$$0{,}414\,213\,56\ldots - \frac{24}{60} = 0{,}142\,135\,6\ldots$$

V dalším kroku hledáme číslo, které bude na druhém „šedesátinném“ místě, které můžeme zapsat jako $n/60^2$. Zbytek z předchozího kroku tedy vynásobíme 60^2, čímž dostáváme

$$3\,600 \cdot 0{,}014\,213\,56\ldots = 51{,}16\ldots$$

Nyní je zřejmé, že na druhém „šedesátinném“ místě se nachází 51 a zbytek činí 0,000 046 89. Takto bychom mohli pokračovat do nekonečna, protože $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. To znamená, že nelze vyjádřit jako zlomek. Pokud by toto číslo šlo zapsat na konečný počet „šedesátinných“ míst, tak bychom je mohli jednoduše sečíst a rozšířit je na jeden zlomek.

My máme číslo zapsat pomocí tří „šedesátinných“ míst, a proto celý proces ještě jednou zopakujeme

$$0{,}000\,046\,89 \cdot 60^{-3} = 10{,}13\ldots$$

Dostáváme třetí „šedesátinné“ místo jako 10 a zbytek 0,000 000 599.

Odmocninu ze dvou tedy můžeme na tři „šedesátinná“ místa zapsat jako

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1;24{,}51{,}10\,.$$

Abychom určili desetinné místo, v němž se tento zápis liší od skutečné hodnoty, převedeme jej zpět do desítkové soustavy a porovnáme ho se skutečnou hodnotou. Tím ale dostaneme zbytek, který jsme získali při převodu do šedesátkové soustavy, a tedy vidíme, že tento zápis je přesný na šest desetinných míst a odchylka vzniká až na sedmém desetinném místě. Úplně stejně můžeme postupovat s číslem π, pro které získáme šedesátkový zápis 3;8,29,44... Přesnost takového zápisu je na sedm desetinných míst, odchylka nastává až na osmém desetinném místě.

Poznámky k došlým řešením

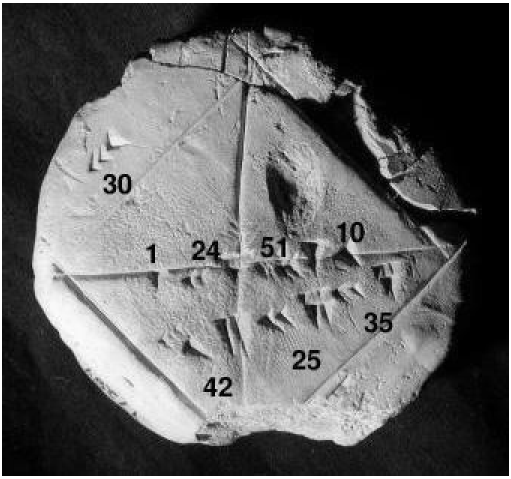
Nejčastější chyba nastávala v tom, že jste převáděli π a $\sqrt{2}$ ze zaokrouhlených hodnot s nedostatečnou přesností. Poté se vám výsledky lišily už na druhém nebo třetím místě, protože platí, že převedené číslo nemůže mít větší přesnost než převáděné číslo.

Historická poznámka

Jak jsme již v zadání úlohy uvedli, šedesátkovou soustavu využívali mimo jiné staří Babyloňané. Na následující fotce můžeme vidět starou destičku, na kterou Babyloňané zapsali právě odmocninu ze dvou v šedesátkové soustavě se stejným výsledkem jako v této úloze. Ačkoliv šedesátková soustava může vyjadřovat některá čísla přesněji, dnes se používá převážně desítková soustava, která je jednodušší na vyjádření, jelikož na ni nepotřebujeme šedesát odlišných znaků. Navíc je desítková soustava pro lidi přirozenější díky tomu, že máme deset prstů, tudíž můžeme počítat „na prstech“. I přesto však šedesátková soustava nevymizela úplně – ještě dnes se pomocí ní vyjadřuje čas a úhel.

Marco Souza de Joode
`joode@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



Obr. 1: Starobabylonská hliněná tabulka s naznačeným čtvercem s úhlopříčkami a v klínovém písmu popsanou stranou o délce 30. První řádka čísel odpovídá šedesátkovému rozvoji $\sqrt{2}$. Druhá řádka pak není nic jiného než délka úhlopříčky (v desítkové soustavě $30\sqrt{2} \doteq 42{,}4264$). Autor: Bill Casselman, licence: GFDL (`http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html`), CC-BY-SA-3.0 (`http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`), CC-BY-2.5 (`https://creativecommons.org/licenses/by/2.5`)