Úloha V.1 ... Platón

5 bodů; průměr 5,00; řešilo 10 studentů

Lidé byli již od starověku fascinováni geometrií a souměrností. Jedním ze symbolů dokonalosti byla ve starověkém Řecku takzvaná platónská tělesa. To jsou tělesa, jejichž stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a existuje jich celkem pět – čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. V antice jim byla přiřazována symbolika pěti prvků. Ovšem i ze současného pohledu mají tato tělesa některé zajímavé vlastnosti, například se velmi často objevují ve tvarech krystalů.

Na našem webu[1] můžete najít sítě těchto těles. Vaším úkolem bude nejprve vystřihnout sítě a slepit z nich tělesa (nezapomeňte poslat fotku) a poté u každého spočítat všechny vrcholy, hrany a stěny a zapsat tyto počty do tabulky. Souvisí spolu nějak tato čísla pro každé těleso? Zkuste najít jednoduchý vzorec, který je vždy spojuje.

Nejprve musíme tělesa složit z jejich sítí, které lze najít na webu.[2] Máme-li tělesa složená, můžeme se pustit do počítání vrcholů, hran a stěn. Abychom měli jistotu, že něco nepočítáme dvakrát, vezmeme si na pomoc fix, kterým si budeme značit již započítané objekty. Výsledky si můžeme prohlédnout v následující tabulce.

Tab. 1: Celkové počty stěn, hran a vrcholů dostupných těles

Těleso	Stěny	Hrany	Vrcholy
Čtyřstěn	4	6	4
Krychle	6	12	8
Osmistěn	8	12	6
Dvanáctistěn	12	30	20
Dvacetistěn	20	30	12

Podívejme se podrobněji na nalezené počty. Vyskytuje se zde několik pravidelností. Například pro krychli a osmistěn platí, že obě tělesa mají stejný počet hran, avšak hodnoty pro počet vrcholů a stěn mají zaměněné. To vychází z takzvaného principu *duality* těchto těles. Pokud ve středech stěn krychle uděláme body, které vhodně spojíme, získáme osmistěn. A samozřejmě to funguje i naopak. Jedno těleso lze tedy vepsat do druhého tak, že každý jeho vrchol se dotýká středu jedné stěny druhého tělesa. Dále si můžeme všimnout, že u všech těles je nejvyšší počet hran, ale vždy je menší než součet počtu stěn a vrcholů těchto těles. Pokud budeme trochu počítat, zjistíme, že součet počtu stěn a vrcholů je vždy o dva větší než počet hran. Označme počet vrcholů V, počet stran S a počet hran H, pak platí

$$V + S - H = 2\,.$$

[1] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/s5/platon.pdf`
[2] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r7/s5/platon.pdf`

Platónskými tělesy se v 18. století zabýval švýcarský matematik a fyzik Leonard Euler, a proto se tento vztah, který spojuje počet vrcholů, stěn a hran jednotlivých platónských těles, nazývá Eulerův vzorec. Jeho pravdivost si můžeme ověřit na tabulce námi naměřených hodnot.

Marek Božoň
marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.