Úloha IV.5 ... Twilight

7 bodů; (chybí statistiky)

Gravitační přitažlivost tělesa popisujeme gravitačním zrychlením, jehož hodnotu můžeme určit z jeho hmotnosti a naší vzdálenosti od tělesa. Když se však na Zemi postavíme na váhu, jí udaný výsledek neovlivňuje jen zrychlení gravitační, ale i tíhové, do něhož je přičten také vliv odstředivého zrychlení způsobeného rotací planety. Nezapomínejme však na vliv ostatních nebeských těles!

(1) *Bez uvažování přitažlivosti Měsíce a Slunce, spočtěte povrchová tíhová zrychlení na pólu a na rovníku Země.*

(2) *Jaké bude toto zrychlení na rovníku, pokud ho budeme určovat při zatmění Slunce s oběma tělesy v zenitu (přímo nad hlavou)?*[1]

(3) *A jak se změní při zatmění Měsíce, kdyby zůstal v zenitu a Slunce se objevilo v nadiru, tj. přímo pod nohama?*

(4) *Kolikrát dále by se musel Měsíc vzdálit od Země v předchozím úkolu, aby nám váha, když se na ni na rovníku postavíme, ukazovala stejnou hodnotu, jako za podmínek z prvního úkolu?*

(1) Pro nalezení řešení si musíme uvědomit, jak přesně vypadá gravitační a odstředivé zrychlení na daných místech Země.

Při určování gravitačního zrychlení určitě použijeme Newtonův zákon popisující gravitační sílu F_g, kterou na sebe vzájemně působí dvě tělesa s hmotnostmi m_1 a m_2 ve vzdálenosti r. V něm značí $\mathrm{G} \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}}$ gravitační konstantu.[2] Zákon ve tvaru platícím pro velikost výsledné síly vypadá takto:

$$F_\mathrm{g} = \mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\,.$$

Odstředivou sílu F_od, která popisuje sílu působící na těleso rotující se vzdáleností r' od osy otáčení rychlostí v, resp. úhlovou rychlostí ω (neboli o jaký úhel se těleso otočí za čas) a mající hmotnost m, vyjádříme takto:

$$F_\mathrm{od} = \frac{mv^2}{r'} = m\omega^2 r'\,.$$

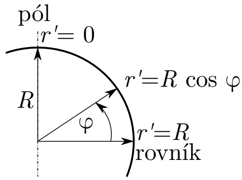
Pomocí dosazení do těchto dvou vztahů můžeme vyjádřit tíhové zrychlení g_1. To provedeme tak, aby m_1, resp. m, byla hmotnost zrychleného tělesa a m_2 hmotnost planety Země. Vzdálenost r ve vzorci gravitační síly doplníme za poloměr Země R. U odstředivého zrychlení si však musíme dát pozor na to, že r' ve vyjádření odstředivé síly značí vzdálenost *od osy otáčení*, která závisí na naší zeměpisné šířce φ – člověk na rovníku se otáčí rychleji než člověk na pólu, který se neotáčí vůbec.

$$g_1 = \frac{F_\mathrm{g} - F_\mathrm{od}}{m_1} = \frac{\mathrm{G}m_2}{R^2} - \omega^2 R\cos\varphi$$

[1] Uvažujte zde i v dalších úkolech tabulkové střední vzdálenosti mezi tělesy.

[2] V učebnicích se tato konstanta často označuje pomocí κ (malá řecká kappa), avšak G se používá častěji ve skutečné fyzice.

Zde je kosinus (cos) jedna z tzv. goniometrických funkcí, se kterými jste se možná ještě nesetkali.[3] Pro výpočet však stačí vědět, že pro $\varphi = 0°$ (na rovníku) vychází $\cos\varphi$ jako 1 a pro $\varphi = 90°$ (na pólech) vychází jako 0. Toto dává fyzikální smysl, jelikož na rovníku působí odstředivá síla nejvíce a na pólu naopak vůbec. K výpočtu vlastně tyto funkce ani nepotřebujeme znát, jen na rovníku sílu započítáme celou a na pólu vůbec. V obou těchto speciálních případech tedy není nutné kosinus ani psát. My jsme jej však v řešení pro úplnost zmínili.



Následně potřebujeme zjistit úhlovou rychlost ω. Tu vypočítáme jako podíl plného úhlu[4] 2π a periody úhlové rotace Země $24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$:

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,400\,\mathrm{s}} \doteq 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Alternativně můžeme počítat s rychlostí, kterou s poloměrem Země R vypočítáme takto:

$$v = \frac{2\pi R}{86\,400\,\mathrm{s}} \doteq R \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Oba tyto způsoby vedou ke stejné výsledné velikosti síly. Z fyzikálních tabulek můžeme dále zjistit poloměr Země $R = 6\,378{,}1\,\mathrm{km}$ (Zemi považujeme za kouli) a její hmotnost $m_2 = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Tím pádem máme veškeré potřebné hodnoty a nyní jen stačí dosadit do vzorce pro pól (g_p) a rovník (g_r):

$$\begin{aligned}
g_\mathrm{p} &= G\frac{m_2}{R^2}\\
&= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6\,378\,100^2}\,\mathrm{m/s^2} \doteq 9{,}804\,9\,\mathrm{m/s^2}\\
g_\mathrm{r} &= G\frac{m_2}{R^2} - \omega^2 R\\
&= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6\,378\,100^2}\,\mathrm{m/s^2} - \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} 6\,378\,100\,\mathrm{m/s^2}\\
&\doteq 9{,}771\,2\,\mathrm{m/s^2}\,.
\end{aligned}$$

[3] Pro úvod do goniometrických funkcí doporučujeme přečíst Výfučtení 4. série 2. ročníku, dostupné na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r2/vyfucteni/vyfucteni_4.pdf`.

[4] Pozn.: zde musíme úhel vyjadřovat v tzv. radiánech, což je bezrozměrná jednotka, pro kterou platí $360° = 2\pi\,\mathrm{rad}$. Více o radiánech najdete ve Výfučtení 5. ročníku, 6. série na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r5/vyfucteni/vyfucteni_6.pdf`.

(2) Zde použijeme předchozí výpočet, jen ho trochu upravíme, doplníme do něj hodnoty nejdříve pro Slunce a pak i pro Měsíc. Gravitační vlivy obou těles v nadhlavníku člověka nadlehčují, a proto jejich gravitační síly musíme odečíst od síly, kterou jsme vypočítali minule. Gravitační síly obou těles vyjádříme tedy takto:

$$F_\mathrm{m} = \mathrm{G}\frac{m_1 m_\mathrm{m}}{(r_\mathrm{m})^2}\,,$$
$$F_\mathrm{s} = \mathrm{G}\frac{m_1 m_\mathrm{s}}{(r_\mathrm{s})^2}\,.$$

Pokud budeme chtít vypočítat zrychlení, jednoduše vzorce výše vydělíme hmotností zrychleného tělesa m_1:

$$g_\mathrm{m} = \mathrm{G}\frac{m_\mathrm{m}}{(r_\mathrm{m})^2}\,,$$
$$g_\mathrm{s} = \mathrm{G}\frac{m_\mathrm{s}}{(r_\mathrm{s})^2}\,.$$

Zde index „m“ značí Měsíc a index „s“ Slunce. Rychlým pohledem do tabulek opět nalezneme potřebné hodnoty, a to hmotnost $m_\mathrm{m} = 7{,}35\cdot 10^{22}$ kg a vzdálenost $r_\mathrm{m} = 3{,}84\cdot 10^{8}$ m Měsíce od Země, nápodobně i údaje spojené se Sluncem, tedy $m_\mathrm{s} = 2\cdot 10^{30}$ kg, $r_\mathrm{s} = 1{,}5\cdot 10^{11}$ m. Samotný poloměr Země a jeho vliv je vůči použitým vzdálenostem zanedbatelný. Nyní jen stačí odečíst od minulého zrychlení $(F_\mathrm{m} + F_\mathrm{s})/m_1$, dostaneme tak zrychlení, které nás nadlehčuje. Pro hledané zrychlení g_2 získáme takovýto vzorec:

$$\begin{aligned}
g_2 &= g_\mathrm{r} - \frac{F_\mathrm{m} + F_\mathrm{s}}{m_1} = g_\mathrm{r} - (g_\mathrm{m} + g_\mathrm{s}) = g_\mathrm{r} - \mathrm{G}\left(\frac{m_m}{r_m^2} + \frac{m_s}{r_s^2}\right) \\
&= 9{,}771\,2\,\mathrm{m/s^2} - (6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}})\left(\frac{7{,}35\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(3{,}84\cdot 10^{8}\,\mathrm{m})^2} + \frac{2\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}\right) \\
&\doteq 9{,}765\,2\,\mathrm{m/s^2}\,.
\end{aligned}$$

(3) U této podúlohy bude postup stejný jako výše, jen nebudeme zrychlení od Slunce odčítat, nýbrž přičítat, jelikož působí ve stejném směru jako to zemské. Pro výsledné zrychlení g_3 dostaneme:

$$\begin{aligned}
g_3 &= g_\mathrm{r} - \mathrm{G}\left(\frac{m_\mathrm{m}}{r_\mathrm{m}^2} - \frac{m_\mathrm{s}}{r_\mathrm{s}^2}\right) \\
&= 9{,}771\,2\,\mathrm{m/s^2} - (6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}})\left(\frac{7{,}35\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(3{,}84\cdot 10^{8}\,\mathrm{m})^2} - \frac{2\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2}\right) \\
&\doteq 9{,}777\,1\,\mathrm{m/s^2}\,.
\end{aligned}$$

(4) Protože chceme, aby bylo zrychlení stejné jako v prvním úkolu, musí se gravitační síly Měsíce a Slunce vyrušit (resp. výslednice těchto dvou sil musí být nulová). Nutně proto platí $F_\mathrm{m} = F_\mathrm{s}$, což vyplývá z Newtonova prvního zákona. Zapíšeme si tedy rovnici, kde srovnáme tyto dvě síly, které jsme si již dříve vyjádřili. Předtím v nich však byly všechny veličiny známé konstanty, nyní považujeme vzdálenost Měsíce od Země za neznámou. Dostáváme tedy jednu rovnici o jedné neznámé r_m, kterou umíme vyřešit. Jelikož r_m má značit skutečnou

vzdálenost Měsíce od Země, označíme si hypotetickou vzdálenost jiným jménem r_M. Nyní už ji můžeme řešit, abychom zjistili, v jaké vzdálenosti se Měsíc od Země musí nacházet:

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{s} &= F_\mathrm{m} \\
\mathrm{G}\frac{m_1 m_\mathrm{s}}{r_\mathrm{s}^2} &= \mathrm{G}\frac{m_1 m_m}{r_\mathrm{M}^2} \\
r_\mathrm{M}^2 &= r_\mathrm{s}^2 \frac{m_1 m_\mathrm{m}}{m_1 m_\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

$$
r_\mathrm{M} = r_\mathrm{s}\sqrt{\frac{m_\mathrm{m}}{m_\mathrm{s}}} = (1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}} = 2{,}88 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}\,.
$$

Teď chceme zjistit, kolikrát musí být R_M větší než R_m. Rozmyslete si, proč tento poměr n vypočteme takto:

$$
n = \frac{R_\mathrm{M}}{R_\mathrm{m}} = \frac{2{,}88 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}}{3{,}84 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}} \doteq 0{,}075\,.
$$

To znamená, že by se Měsíc měl postavit asi 0,075krát dále, neboli $1/n \approx 13$krát blíže.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.