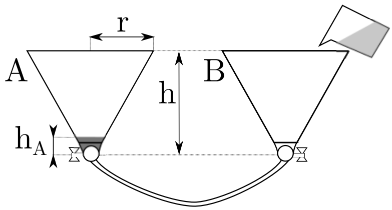
Úloha IV.4 ... A co takhle rtuť

6 bodů; (chybí statistiky)

Danovi zbyly dva velké nevyužité trychtýře A a B ve tvaru kuželu, oba s poloměrem podstavy $r = 12{,}5\,\mathrm{cm}$ a výškou $h = 15\,\mathrm{cm}$. Danovi také zbylo hodně rtuti od posledního pokusu o výrobu tlakoměru a rozhodl se trochu experimentovat s hydrostatickým tlakem. Trychtýře upevnil vedle sebe do stejné výšky, ústími dolů, přičemž je spojil tenkou hadičkou s uzavřenými ventily na koncích. Do trychtýře A potom začal nalévat rtuť o hustotě $\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13\,600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, dokud její hladina nebyla $h_{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{cm}$ nad ústím. Jaký objem vody V_{B} o hustotě $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ musí Dan nalít do trychtýře B, aby po ustálení a otevření ventilů na hadičce nedošlo k jakékoli změně výšky hladin v trychtýřích? Objem, o který je kužel zkrácen na svém ústí, a objem hadičky zanedbejte.



Hledáme objem kuželu tvořeného vodou, u kterého neznáme výšku h_{B}, ani poloměr podstavy r'. Tyto veličiny na sobě však závisí, a proto nám stačí si vypočítat např. pouze výšku a poloměr z ní dopočítat.

Jak ale výšku zjistíme? Vyjdeme z jednoduché, ale zato účinné úvahy – pokud má zůstat soustava dvou spojených trychtýřů, částečně naplněných kapalinami v klidu, musí být hydrostatický tlak při ústí hadičky pro obě kapaliny stejný. Tato úvaha je vlastně v jistém smyslu obdobou Newtonova prvního zákona.

Pro určení hydrostatického tlaku[1] použijeme vztah, který nám říká, že jeho velikost je součinem hloubky od hladiny kapaliny, hustoty kapaliny a tíhového zrychlení. K výpočtu výšky hladiny vody nad ústím nám pak stačí znát jen hustoty obou kapalin, které jsou uvedeny v zadání úlohy. Dostaneme tedy tento vzorec:

$$h_{\mathrm{A}}\varrho_{\mathrm{Hg}}g = h_{\mathrm{B}}\varrho g\,.$$

Z výchozího vztahu můžeme vykrátit tíhové zrychlení g a následně z něj vyjádříme výšku hladiny vody nad ústím h_{B}:

$$h_{\mathrm{B}}\varrho = h_{\mathrm{A}}\varrho_{\mathrm{Hg}}\,,$$

$$h_{\mathrm{B}} = h_{\mathrm{A}}\frac{\varrho_{\mathrm{Hg}}}{\varrho}\,.$$

Ještě musíme spočítat poloměr podstavy kuželu r', k čemuž použijeme nám již známou výšku h_{B}. Víme totiž, že trychtýř ve tvaru kužele je podobný kuželu vody, takže je to jeho zmenšenina. V podstatě můžeme říci, že všechny rozměry kužele vody jsou několikrát menší, než

[1] Více o hydrostatickém tlaku najdete ve Výfučtení 2. série 3. ročníku na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`.

odpovídající rozměry trychtýře. Proto platí, že $r/r' = k$, kde k je nějaké číslo (kolikrát má trychtýř větší poloměr než voda) a také $h/h_\mathrm{B} = k$. Nyní smíme uplatnit poměrně logickou úvahu, že když se dva výrazy rovnají jednomu výrazu, pak se také ony dva výrazy rovnají sobě navzájem. Matematicky řečeno:

$$\frac{h}{h_\mathrm{B}} = \frac{r}{r'}\,,$$
$$\frac{h_\mathrm{B}}{h} = \frac{r'}{r}\,,$$
$$r' = \frac{h_\mathrm{B} r}{h}\,.$$

Výšku kužele vody ale nemáme vyjádřenou pomocí nám známých hodnot, proto použijeme výsledek předchozího výpočtu a dosadíme za h_B a složený zlomek upravíme:

$$r' = \frac{h_\mathrm{A}\,\varrho_\mathrm{Hg} r}{\varrho h}\,.$$

Teď už víme vše, co k výpočtu potřebujeme. Zbývá tedy dosadit známé hodnoty do vzorce pro výpočet objemu kužele:

$$V_\mathrm{B} = \frac{1}{3}\pi r'^2 h_\mathrm{B} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h_\mathrm{A}\,\varrho_\mathrm{Hg} r}{\varrho h}\right)^2 \frac{h_\mathrm{A}\,\varrho_\mathrm{Hg}}{\varrho}\,.$$

Který nakonec ještě zjednodušíme:

$$V_\mathrm{B} = \frac{\pi h_\mathrm{A}^3}{\varrho_\mathrm{Hg}^3 r^2} 3\varrho^3 h^2\,.$$

Tím jsme se dostali k obecnému vzorci, do kterého už jen stačí dosadit konkrétní hodnoty uvedené v zadání. Obvykle to provádíme v základních jednotkách, ovšem my to můžeme udělat i v jiných, pokud budou u všech veličin stejné. Hustotu tedy dosadíme v $\mathrm{g{\cdot}cm^3}$ a výšky s poloměry v cm. Proto dostaneme výsledek v $\mathrm{cm^3}$.

$$V_\mathrm{B} = \frac{\pi \cdot 1^3\,\mathrm{cm} \cdot 13{,}6^3\,\mathrm{g{\cdot}cm^3} \cdot 12{,}5^2\,\mathrm{cm}}{3 \cdot 1^3\,\mathrm{g{\cdot}cm^3} \cdot 15^2\,\mathrm{cm}} \doteq 1\,800\,\mathrm{cm^3}\,.$$

Dan tak musí do druhého trychtýře nalít vodu o celkovém objemu asi $1\,800\,\mathrm{cm^3}$. Všimněme si, o jak veliké množství se jedná, když je třeba na vyvážení pouze jednoho centimetru výšky rtuti. Tomuto jevu říkáme *hydrostatický paradox(on)* – hydrostatický tlak závisí pouze na svislém sloupci kapaliny nad místem působení a nijak se nezvětší tím, že ho bude obklopovat větším množstvím kapaliny např. v poloměru kužele. Tohoto paradoxu si všimli lidé už dříve – například Blaise Pascal díky němu dokázal prasknout sud jen přilitím sklenice vody (která ovšem měla díky tenké trubičce velkou výšku).

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.