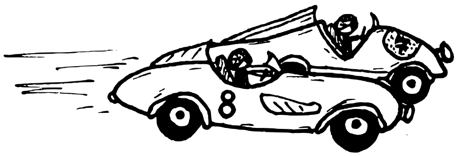
Úloha IV.3 ... Oktávia ide stovkou

6 bodů; (chybí statistiky)

Ve vytrvalostním automobilovém závodě se závodníci Pepa a Lukáš předhánějí na posledních několika kilometrech cílové rovinky. Pepa věří, že má vítězství v kapse, a proto jede jen rychlostí $v_\mathrm{P} = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. I když ho Lukáš předjíždí rychlostí v_L o $30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ větší, Pepa nepřidává plyn a do cíle je pevně rozhodnut dojet stálou rychlostí. A opravdu! Když je Lukáš 1 km před Pepou, selhává mu motor a Lukáš tak rovnoměrně zpomaluje celou bolestnou 1 min. Takto Lukáš zpomalí až na nejmenší rychlost v, při které mu však motor opět naskočí a on náhle se stejně velkým zrychlením opět zrychluje až na svou původní rychlost v_L. Právě když dosáhne této rychlosti, přijíždí do cíle, a to právě ve stejný okamžik jako Pepa, který po celou dobu zachovával chladnou hlavu. Je to sice remíza pro Pepu, ale velké štěstí pro Lukáše! Na jakou nejmenší rychlost Lukáš zpomalil kvůli selhání motoru?



Nejdříve se zamyslíme nad tím, co bychom k řešení úlohy mohli využít. Pravděpodobně budeme muset získat nějakou rovnici zahrnující hledanou rychlost v, kterou z ní následně vyjádříme. Oba závodníci jedou po stejné dráze s totožnou délkou, dáme proto do rovnosti dráhy, které oba ujeli. Vyplatí se popsat pohyby obou závodníků zvlášť a následně je porovnat.

Na situaci se podíváme ve chvíli, kdy Lukáš začne zpomalovat. Velikost jeho zpomalení si označíme a. Abychom mohli provést obecné řešení, označíme si čas, po který Lukášovo auto zpomaluje, jako $t = 1\,\mathrm{min}$. Pepu prozatím sledovat nebudeme. Spočítáme si pomocí vzorce pro zrychlený pohyb,[1] jakou dráhu s_1 Lukáš urazí za dobu zpomalování:

$$s_1 = v_\mathrm{L} t - \frac{1}{2} a t^2 \,.$$

Také si určíme zpomalení (které je ve fyzikálním smyslu vlastně záporné zrychlení) a. Vypočítáme ho jednoduše jako změnu rychlosti za určitý čas.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_\mathrm{L} - v}{t} \,.$$

Lukáš zpomalil na rychlost v a opět ji zvyšuje se stejně velkým zrychlením jako předchozí zpomalení, tedy a. Spočítáme čas, po který bude zrychlovat (mělo by to logicky trvat stejně dlouho, jelikož změna rychlosti je stejná a zrychlení také, ale lepší je přesvědčit se i analyticky):

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_\mathrm{L} - v}{(v_\mathrm{L} - v)/t} = t \,.$$

Zrychlovat bude tedy opět stejný čas t. Nyní můžeme vypočítat dráhu s_2, kterou urazí Lukáš, než dosáhne konečné rychlosti v_L:

$$s_2 = vt + \frac{1}{2} a t^2 \,.$$

[1] Pokud nejste se zrychleným pohybem dostatečně seznámeni, můžete si projít Výfučtení 1. série 4. ročníku na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r4/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf`.

A celková dráha s_L, kterou urazil, je součet s_1 a s_2:

$$s_\mathrm{L} = s_1 + s_2 = v_\mathrm{L}t - \frac{1}{2}at^2 + vt + \frac{1}{2}at^2 = v_\mathrm{L}t + vt\,.$$

Celkový čas t_c, po který se Lukáš pohyboval, je součet času, během kterého zpomaloval a času, během kterého zrychloval, tedy $t_\mathrm{c} = t + t = 2t$.

Tímto jsme Lukášův pohyb dopočítali, ale co Pepa? Ten zachoval chladnou hlavu a celou dobu se pohyboval rovnoměrným přímočarým pohybem o rychlosti v_P. Ujel tedy celkovou dráhu s_P:

$$s_\mathrm{P} = v_\mathrm{P}t_\mathrm{c} = 2v_\mathrm{P}t\,.$$

Nyní můžeme dát obě dráhy do rovnosti, ale musíme k dráze Lukáše přičíst $d = 1\,\mathrm{km}$, protože začínal o kilometr dále, takže ujel méně:

$$\begin{aligned} s_\mathrm{P} &= s_\mathrm{L} + d,\\ 2v_\mathrm{P}t &= v_\mathrm{L}t + vt + d\,. \end{aligned}$$

Odtud po vyjádření rychlosti v získáme vzorec, do kterého již dosadíme známé hodnoty (avšak pozor, v základních jednotkách):

$$\begin{aligned} v &= \frac{2v_\mathrm{P}t - v_\mathrm{L}t - d}{t}\\ &= \frac{2\cdot(100/3{,}6)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\cdot 60\,\mathrm{s} - (130/3{,}6)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\cdot 60\,\mathrm{s} - 1\,000\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} \doteq 2{,}77\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Lukáš mohl zpomalit na nejmenší rychlost $v \doteq 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Poznámky k došlým řešením

Valná většina z vás se dopracovala ke správnému výsledku, za každé takové řešení jsem dal plný počet bodů. Nejvíce se vyskytovalo řešení pomocí určení průměrné rychlosti Lukášova zpomaleného pohybu a následný výpočet minimální rychlosti ze znalosti, že u zrychleného pohybu se průměrná rychlost rovná průměru maximální a minimální rychlosti. Tento způsob samozřejmě dodá správný výsledek, ale dejte si pozor, průměrování rychlostí může být velmi často ošidné, protože ne vždy platí, že průměrnou rychlost můžeme spočítat jako prostý průměr rychlostí. Kdyby například jezdec na nějaký čas zastavil, již bychom pro výpočet průměrné rychlosti museli postupovat jinak.

Robert Gemrot

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.