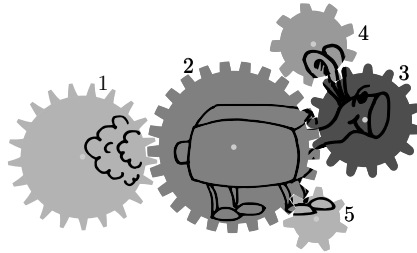


Úloha II.2 ... Spojená kolečka

5 bodů; (chybí statistiky)

Na Matfyzu si velmi váží Výfučka, a proto se rozhodli sestrojít pohybuující se soustavu ozubených kol s obrázkem Výfučka, která bude zdobit hlavní budovu. První kolečko bude mít 21 zubů, druhé 25 zubů, třetí 15 zakulacených zubů, čtvrté kolečko bude s 9 zuby. Poslední páté kolečko má mít pouhých 7 zubů. Všechna kolečka se mají točit zároveň a zapadat do sebe podle obrázku. Kolikrát se otočí každé z nich, než si budeme moci opět prohlédnout Výfučka jako na začátku?



Jelikož do sebe kolečka musí zapadat a pořád se dotýkají, trvá otočení o jeden zub na všech kolečkách stejnou dobu. Abychom si mohli prohlédnout Výfučka jako na začátku, musí se každé kolečko otočit o celočíselný počet otáček. Aby se kolečko otočilo kolem dokola, musí se otočit o všechny svoje zuby.

Všechna kolečka se logicky musí otočit o stejný počet zubů. Chceme tedy, aby tento celkový počet zubů byl dělitelný počtem zubů každého kolečka a zároveň chceme, aby toto číslo bylo nejmenší možné. Dosáhneme toho tak, že počet zubů, o který jsme soustavu otočili, vydělený jakýmkoliv z počtu zubů na kolečkách, bude celé číslo, což znamená, že se všechna kolečka otočila o celý počet otáček. Námí hledané číslo se nazývá nejmenší společný násobek, v tomto případě hledáme nejmenší společný násobek čísel udávající počet zubů na jednotlivých kolečkách.

Abychom ho mohli spočítat, rozložíme jej na prvočísla (tzn. hledáme taková prvočísla, která po vynásobení dají rozkládané číslo).

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$25 = 5 \cdot 5$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$7 = 7.$$

Nejmenší společný násobek čísel je takové číslo, z jehož prvočíselného rozkladu dokážeme poskládat všechna původní čísla a přitom v něm není žádné další prvočíslu navíc. Lze ho tedy spočítat jako součin nejvyšších možných mocnin všech prvočísel ze všech prvočíselných rozkladů. Pro naše čísla vidíme, že např. 3 se v prvočíselném rozkladu nejmenšího společného násobku musí objevovat minimálně dvakrát, stejně jako 5. Pro násobek n dostáváme tedy

$$n = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1575.$$

Každé kolečko se tedy otočí o 1575 zubů. Nyní tento počet pouze vydělíme počtem zubů jednotlivých kol, čímž zjistíme, kolikrát se každé kolečko otočilo:

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{1575}{21} = 75, \\n_2 &= \frac{1575}{25} = 63, \\n_3 &= \frac{1575}{15} = 105, \\n_4 &= \frac{1575}{9} = 175, \\n_5 &= \frac{1575}{7} = 225.\end{aligned}$$

Abychom mohli Výfučka opět vidět v jeho plné kráse, musí se první kolo otočit 75krát, druhé kolo 63krát, třetí 105krát, čtvrté 175krát a poslední páté 225krát.

Kateřina Rosická

kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.