Výfučtení: Otáčivý pohyb

Druhý Newtonův zákon (matematicky vyjádřen vztahem $F = ma$) nám říká, že pokud je výslednice sil F působících na těleso o hmotnosti m nenulová, bude se ono těleso pohybovat se zrychlením a. Pod pojmem zrychlení jakožto změnou rychlosti si ale můžeme představit, že se změní *velikost* rychlosti nebo její *směr*. Rozlišovat tak lze mezi dvojím účinkem působících sil.

Jeden z těchto účinků můžeme pozorovat například, když otevíráme dveře nebo v nedávném fenoménu zvaném „bottle flip“. Někdy totiž pozorujeme, že místo posuvného pohybu se předměty otáčí. V následujícím textu se proto budeme zabývat právě otáčením. Vysvětlíme si, jakým způsobem lze otáčení fyzikálně popsat.

Účinky sil na tělesa

Působení nenulové síly na těleso se zákonitě musí projevit. Odborně říkáme, že síla způsobuje nějaký účinek. V jednoduchých mechanických úlohách rozlišujeme tři silové účinky:

- těleso se posune – síly mají tzv. posuvný účinek,
- těleso se začne otáčet – tzv. otáčivý, neboli rotační účinek,
- těleso se zdeformuje – tzv. deformační účinek.

Výsledný účinek sil závisí na konkrétní situaci, tzn. na velikostech a směrech působících sil. Projevit se může třeba i kombinace účinků (míček se po odpálení raketou začne posouvat a rotovat zároveň). V jistých případech ale některé účinky nehrají v praxi velkou roli. Například deformační efekt lidské ruky na ocelový trám je nepatrný a není nutné ho uvažovat. Na popis takto zjednodušených předmětů používají fyzikové modely těles, které nazýváme hmotný bod a tuhé těleso.

Hmotný bod

Pokud uvažujeme, že těleso má zanedbatelný, respektive nedůležitý objem, ale přesto nějakou hmotnost, nazveme ho hmotným bodem. Působiště všech sil na těleso se tedy nachází v tom samém bodě. Hmotný bod ale nelze deformovat, lze ho pouze posouvat a nechat „obíhat“ kolem nějaké osy otáčení. Hmotnými body například nahrazujeme planety, když popisujeme jejich pohyb kolem Slunce.

Tuhé těleso

Tuhé těleso je kromě hmotnosti charakterizované i svým objemem a tvarem, případně rozložením hmoty. Důležité je, že tuhé těleso nelze deformovat. Oproti hmotnému bodu mohou na tuhé těleso působit síly na různých místech a v jejich důsledku se tuhé těleso může otáčet i kolem své osy.

Otáčení tuhých těles

Otáčení libovolného tuhého tělesa lze popsat dvěma údaji: polohou osy otáčení[1] a úhlem otočení α.

[1] Znalost osy otáčení je skutečně důležitý údaj, neboť každé těleso lze otáčet kolem nekonečně mnoha os otáčení.

K popisu rovnoměrného otáčení (za stejný čas se těleso otočí o stejný úhel) se používá veličina zvaná úhlová rychlost. Značí se ω a je definována jako úhel $\Delta\alpha$, o jaký se těleso otočí za jednotku času, tedy $\omega = \Delta\alpha/t$.

Je třeba poznamenat, že úhlovou rychlost obvykle vyjadřujeme v radiánech za sekundu. Je tedy praktické vyjadřovat úhly $\Delta\alpha$ také v radiánech.[2] Často se ale setkáme s tím, že jednotka radián bývá vynechána, tzn. jako jednotku úhlové rychlosti najdete i $\mathrm{s^{-1}}$, nejen $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Podobně jako úhlovou rychlost definujeme i úhlové zrychlení ε. Změní-li se za jednotku času t úhlová rychlost o $\Delta\omega$, úhlové zrychlení bude $\varepsilon = \Delta\omega/t$. Jednotka této veličiny je $\mathrm{s^{-2}}$ (tzn. radiány jsou opět vynechány).

Vztahy mezi silami a otáčením

Již jsme si řekli, že síla může těleso roztočit. Můžeme ale také pozorovat, že nejenom změnou velikosti síly, ale i změnou působiště lze změnit otáčivý účinek síly. Toto si můžete vyzkoušet sami například na dveřích: zkuste působit stejnou silou na kliku dveří a uprostřed dveří a pozorujte, jak rychle se dveře otevřou.

Abychom zahrnuli závislost na působišti sil do jejich otáčivých účinků, zavádíme veličinu zvanou moment síly. Značí se M a vypočítá se jako součin $M = Fr$, kde F je působící síla a r je tzv. rameno síly. Tím většinou myslíme pouhou vzdálenost působiště síly od osy otáčení.[3]

Jednotka momentu síly je jednoduše součin jednotky síly a vzdálenosti, tedy $\mathrm{N \cdot m}$, což se formálně shoduje s jednotkou energie (joule). Nicméně moment síly není jedno z vyjádření energie.

Podobnost posuvného a rotačního světa

Mezi právě zavedenými veličinami (úhel, úhlová rychlost a úhlové zrychlení) a veličinami, které už znáte (dráha s, rychlost v a zrychlení a), existuje výrazná podobnost. Význam těchto veličin je ve své podstatě stejný, jedna sada však popisuje otáčivý pohyb a druhá posuvný.

Například oběh hmotného bodu kolem osy otáčení je ale svým způsobem také posuvný pohyb. Hmotný bod při oběhu kolem osy otáčení přejde jistou dráhu (část obvodu kružnice) jistou rychlostí, které říkáme obvodová rychlost.

Od otáčivých k posuvným veličinám přejdeme tak, že příslušné otáčivé veličiny vynásobíme vzdáleností hmotného bodu od osy otáčení r:

$$s = \alpha r\,, \qquad v = \omega r\,, \qquad a = \varepsilon r\,.$$

Stejné vztahy platí i pro rotaci tuhého tělesa.[4] Otáčení je tak vlastně jenom jiný způsob, jak popsat pohyb po kružnici v makroskopickém měřítku.

Podobnost veličin ale pokračuje. Tak jako se síla projevuje zrychlením, moment síly se projevuje úhlovým zrychlením. Konkrétní vztah mezi těmito veličinami je $M = J\varepsilon$ (srovnejte se vztahem $F = ma$). Veličinu J, která odpovídá otáčivému partneru hmotnosti, zveme moment setrvačnosti a reprezentuje „nechuť" tělesa k otáčení, stejně jako hmotnost těles vypovídá o „nechuti" k posuvnému pohybu.

[2] Pokud jste se s touto jednotkou nesetkali, doporučujeme si přečíst Výfučtení šesté série 5. ročníku *O kružích, kružnicích, stupních a radiánech*, kde vás s radiány rádi seznámíme. Pro připomenutí: $\pi\,\mathrm{rad} = 180^\circ$.

[3] Pro znalce: jedná se o *kolmou* vzdálenost k ose otáčení. Jednoduše stačí prodloužit směr (šipku) síly na přímku a na ni narýsovat kolmici procházející osou otáčení.

[4] Tuhé těleso rotující kolem nějaké osy lze rozbít na velký počet hmotných bodů, které kolem této osy obíhají.

Moment setrvačnosti

Ze vztahu $M = J\varepsilon$ lze vyčíst jednotku momentu setrvačnosti kg·m^2. Pro hmotný bod skutečně platí, že jeho moment setrvačnosti je součin jeho hmotnosti m a druhé mocniny vzdálenosti od osy otáčení r, tzn. $J = mr^2$.

Tento poznatek využijeme i v případě rotujícího tuhého tělesa. Stačí si uvědomit, že tuhé těleso je složené ze spousty hmotných bodů – výsledný moment setrvačnosti bude tedy součtem momentů setrvačností těchto bodů. Pro tenkou obruč rotující kolem svého středu bude tento rozklad velice jednoduchý, neboť všechny body mají stejnou vzdálenost od osy otáčení rovnou poloměru obruče R. Každý z hmotných bodů bude mít moment setrvačnosti $j = mR^2$, kde m je hmotnost hmotného bodu. Sečteme-li všechny takovéto příspěvky, dostaneme moment setrvačnosti obruče:

$$J = mR^2 + mR^2 + \cdots = (m + m + \cdots)\, R^2 = MR^2\,,$$

kde M je hmotnost celé obruče.

Problém může nastat tehdy, když jsou hmotné body tuhého tělesa v různé vzdálenosti od osy otáčení. Například chceme-li rozložit válec, hmotné body na povrchu budou od osy otáčení dále, než body uprostřed. K provedení těchto výpočtů se pak používají složitější matematické metody. Obecně ale platí, že momenty setrvačnosti běžných těles (válec, koule, …) lze vyjádřit ve tvaru kMR^2, kde k je konstanta závislá na tvaru tělesa, M je hmotnost tělesa a R je typický rozměr tělesa (například poloměr nebo délka). Pro momenty setrvačnosti jednoduchých těles platí:

- koule s osou otáčení procházející jejím středem: $J = 2mr^2/5$ (tedy $k = 2/5$),
- válec s osou otáčení procházející středem obou podstav: $J = mr^2/2$,
- tyč s k ní kolmou osou otáčení procházející jejím koncem: $J = ml^2/3$ (zde je l délka tyče),
- tyč s k ní kolmou osou otáčení procházející jejím středem: $J = ml^2/12$.

Rotační práce a energie

Pro práci, kterou vykoná moment síly M na úhlové dráze α, platí jednoduchý vztah $W = M\alpha$.

Kinetická energie otáčení tuhého tělesa je opět jen součet kinetické energie všech jeho hmotných bodů:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \cdots\,,$$

kde m značí hmotnosti a v obvodové rychlosti jednotlivých hmotných bodů (každý hmotný bod má obecně jinou obvodovou rychlost, neboť je jinak vzdálen od osy otáčení). Tento vztah lze ale upravit, neboť víme, že obvodová rychlost je $v = \omega r$, kde r je vzdálenost bodu od osy otáčení. Tedy

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \cdots = \frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_2^2 + \cdots = \frac{1}{2}\omega^2\left(mr_1^2 + mr_2^2 + \cdots\right)\,.$$

Vztah v závorce ale není nic jiného, než moment setrvačnosti tělesa rozepsaný jako příspěvky jednotlivých hmotných bodů. Výsledný vztah pro rotační energii tělesa tedy je

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}J\omega^2\,.$$

Všimněte si, že i tento vztah se velmi podobá posuvné kinetické energii $E_\mathrm{k} = mv^2/2$. Jen za hmotnost m a rychlost v jsme dosadili odpovídající otáčivé veličiny J a ω.

Shrnutí

V tomto spíše teoretickém Výfučtení jsme představili základy toho, jak se ve fyzice popisuje otáčivý pohyb hmotných bodů a tuhých těles. Stačí si zapamatovat, že tento popis je téměř identický s popisem posuvného pohybu – stačí jen místo klasických veličin použít jejich otáčivé kamarády: úhlovou rychlost a úhlové zrychlení a moment síly a setrvačnosti.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.