výfuk

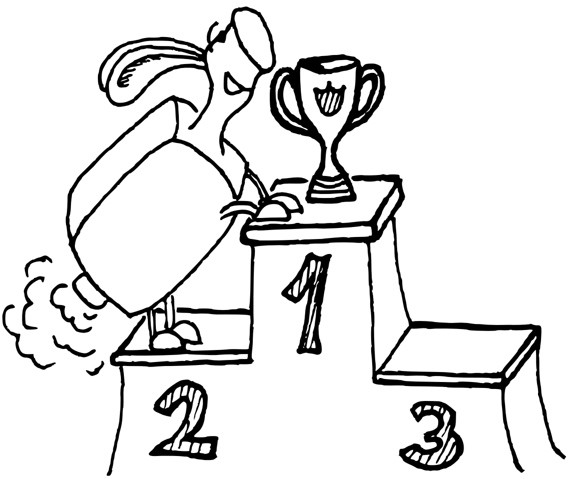
výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

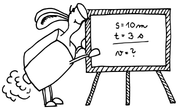
další ročník Výfuku se chýlí ke konci, v rukou totiž držíte brožurku Výfuku s poslední sérií zadání v tomto školním roce. Kromě další várky problémů vás čeká poutavý text o černých dírách a fyzice, která dovoluje jejich existenci.

Poslední obálka, kterou vám v tomto školním roce zašleme, bude obsahovat řešení posledních dvou sérií, diplomy a odměny pro nejlepší řešitele. Byť se budeme snažit vaše řešení opravit a obodovat co nejrychleji, obálku očekávejte ve druhé polovině června.
Hodně zdaru v řešení této série vám přejí

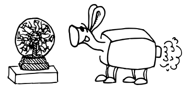
Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



matfyz



Zadání VI. série



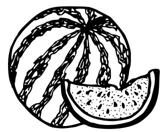
Termín doručení: 29. 5. 2017 20.00

Úloha VI.1 ... Kulka ❻ ❼ 5 bodů

Julča viděla kouzelnické představení, kde kouzelník chytal letící kulku do kovové součástky, kterou držel mezi zuby. Rozhodla se, že si zkusí vyrobit robota, který by dokázal chytit kulky sklapnutím svých čelistí. Vzdálenost pistole od čelistí je 12 m. Čelisti se spouštějí časovým spínačem, který začne odpočítávat ve chvíli, kdy pistole vystřelí náboj. Když odpočet dosáhne nuly, čelisti se zaklapnou, což jim trvá 25 ms. Na jakou dobu musí být spínač nastaven, aby čelisti chytili letící střelu? Rychlost střely je $250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

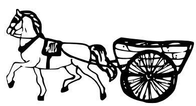
Úloha VI.2 ... Meloun ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Pavla šla jednoho jarního dne na trh a koupila si dokonale kulatý meloun s poloměrem r. Položila ho na zem a odborně provedla svislý řez středem melounu. Obě melounové polokoule se po rozříznutí od sebe odvalily, chvíli se kymácely a nakonec se jejich pohyb vlivem valivého odporu zastavil. Pomůžete Pavle zjistit, jak jsou středy polokoulí od sebe vzdálené?



Úloha VI.3 ... Akce a reakce ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Jistě mnozí z vás znají slavný 3. Newtonův zákon. Není v něm háček? Pokud lokomotiva roztlačuje vagon nebo třeba kůň tahá vůz, jak je možné, že se celý systém rozpohybuje a přitom by vagon s lokomotivou nebo kůň s vozem měly na sebe působit stejně velkými silami, které by se mohly vyrušit, takže by se nic nepohnulo? Vysvětlete, proč se nevyruší a jaké síly působí na každou část systému.



Úloha VI.4 ... Žárovky ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

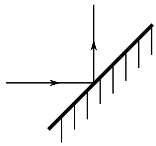
Radka byla nakupovat a jako správná fyzička si pořídila tři stejné žárovky. Aby je otestovala, postupně zapojila každou ze žárovek k ideálnímu zdroji napětí 24 V a změřila, že výkon každé žárovky je 10 W.

Jaký celkový výkon by Radka změřila, kdyby ke stejnému zdroji zapojila všechny tři žárovky najednou, a to (a) sériově anebo (b) paralelně?

Úloha VI.5 ... Síla laseru ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 8 bodů

Paťo si do své laboratoře pořídil silný laser. Nevěřiv se chtěl skutečně přesvědčit, jak je laser silný, a proto se jeho sílu pokusil změřit. Jeho pokus byl ale neúspěšný, neboť měl po ruce jen obyčejný siloměr.

1. Nenulová síla laserového paprsku spočívá v tom, že jednotlivé fotony (částice světelného záření) mají i při nulové hmotnosti nenulovou energii a hybnost. Najděte v literatuře nebo na internetu vztahy pro energii a hybnost fotonu, které závisí na vlnové délce světla λ, Planckově konstantě h a rychlosti světla c.
2. Paťův laser má výkon $P = 50\,\mathrm{W}$ (což je opravdu silný laser). Spočítejte, kolik fotonů N vyletí z laseru za $t = 1\,\mathrm{s}$, pokud je vlnová délka světla $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ (zelené světlo).
3. Laserový paprsek dopadá pod úhlem 45° na zrcátko a odráží se (opět pod úhlem 45°, viz obrázek). Odrazem se sice nemění velikost hybnosti fotonů, ale její směr. Pomocí skládání vektorů vypočítejte, jak velká je tato změna hybnosti Δp pro jeden foton.



Obr. 1: Odraz laserového paprsku od zrcátka

4. Síla, kterou laserový paprsek působí na zrcátko, je daná celkovou změnou hybnosti za sekundu, tzn. $F = \Delta p N/t$. Vypočítejte tuto sílu.
5. Je možné sílu takovéto velikosti měřit siloměrem?

Úloha VI.E ... Sponky ❻ ❼ ❽ ❾ — 7 bodů

Jste-li dostatečně šikovní, povede se vám položit přiložené kovové kancelářské sponky na hladinu vody tak, aby se neponořily, i když je hustota sponek mnohem vyšší než hustota vody.

Obtížnost úkolu se zvýší poté, co do vody přidáte tzv. detergent, například Jar. Rozmíchejte proto 1 ml Jaru (nebo jiného prostředku na nádobí) ve 100 ml čisté vody. Pak 1 ml tohoto roztoku rozmíchejte v dalších 100 ml vody a alespoň 10krát zkuste umístit sponku na hladinu vody. Po prvním pokusu přidejte do vody další mililitr roztoku, pokus zopakujte, přidejte další mililitr a tak dále. V řešení nám pošlete tabulku udávající počet plovajících sponek pro různý objem přidané jarové vody.

Poznámky k experimentu:

- před pokusem si pořádně umyjte ruce,
- umísťování sponek na hladinu vody si nejdříve několikrát vyzkoušejte v čisté vodě,
- zkuste použít pinzetu nebo jiný nástroj,
- po každém pokusu je dobré sponky opláchnout v tekoucí vodě.

Úloha VI.C ... Stlačená Země ❻ ❼ ❽ ❾ — 5 bodů

Mnoho lidí se neopodstatněně obává toho, že vědci v CERNu jednou omylem vyrobí černou díru, která vzápětí pohltí celou Zemi. Představte si, že by k této katastrofě opravdu došlo a spočtěte, jak velká díra (tzn. s jakým Schwarzschildovým poloměrem) by tímto způsobem vznikla. Potřebné údaje hledejte v textu Výfučtení nebo na internetu.

Výfučtení: Tajemství černých děr

Možná jste už někdy přemýšleli nad tím, do jaké míry platí fyzikální zákony, které se učíte ve škole. Platí kalorimetrická rovnice stejně pro všechna skupenství látky? Ve všeobecném vztahu pro gravitační sílu

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

figuruje kromě gravitační konstanty $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^1{\cdot}s^2}$ a hmotností těles m_1, m_2 i jejich vzájemná vzdálenost r. Co by se stalo, kdyby nějaké těleso padalo z opravdu velké výšky? Co kdyby někdo vytvořil stroj, který by měl účinnost vyšší než sto procent?

Podobné myšlenky jsou často hnací sílou fyziky a nutí vědce vymýšlet nové teorie, respektive vylepšovat ty stávající. Příkladem testu fyzikálních zákonů v extrémních situacích jsou právě černé díry. V tomto dílu Výfučtení se blíže podíváme na to, jak tyto exotické vesmírné objekty fungují a vysvětlíme si, proč je fyzika černých děr opravdu extrémní.

Černé díry se neobjevují jen tak, ale jsou naopak poslední fází života velmi těžkých hvězd. V průběhu života takovéto hvězdy probíhají jaderné reakce, při kterých hvězda spaluje lehké prvky (zejména vodík) na těžší (helium, uhlík, křemík, ...). Při těchto reakcích vzniká velké množství energie, které hvězda vyzařuje do okolí. Tlak tohoto záření působí proti gravitační síle, která přitahuje veškerou hmotu hvězdy do jejího středu. Jedná-li se o velkou hvězdu (s hmotností přesahující trojnásobek hmotnosti Slunce), po spálení veškerého paliva gravitace překoná tlakovou sílu záření a dojde k tzv. gravitačnímu kolapsu. Hvězda se začne postupně zmenšovat, přičemž její hustota bude s klesající velikostí rychle růst.

Gravitační zrychlení na povrchu hvězdy s hmotností M a poloměrem R bude rovno

$$a_g = \frac{GM}{R^2}$$

Všimněte si, že i g bude rychle růst[1] a tedy bude i náročnější takovéto gravitační pole opustit. Tuto náročnost lze popsat tzv. únikovou rychlostí. To je minimální rychlost, kterou se musíme „vystřelit“ z povrchu hvězdy, abychom mohli její gravitační pole opustit.

Pokud bychom měli dostatečně silnou raketu, uměli bychom opustit i opravdu silné gravitační pole. Speciální relativita však omezuje maximální rychlost, kterou lze ve vesmíru dosáhnout, na rychlost $c = 300\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Naší nedostatečnou technologií takovéto rychlosti sice nelze dosáhnout, ale světlo se ve vakuu touto rychlostí pohybuje zcela běžně.[2]

Aby se tedy z hroutící hvězdy stala černá díra, úniková rychlost na jejím povrchu musí překonat právě rychlost světla ve vakuu, neboť po překonání této hranice neexistuje mechanismus, pomocí kterého by bylo možné její gravitační pole opustit (proto se těmto objektům říká černé díry). Kritický poloměr, kdy se hroutící hvězda promění na černou díru, teoreticky spočetl Karl Schwarzschild. Po něm pojmenovaný Schwarzschildův poloměr lze vyjádřit jako

$$r_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2},$$

kde M je hmotnost černé díry.

[1] Ve vztahu výše je gravitační zrychlení nepřímo úměrné druhé mocnině poloměru. Tzn. zmenší-li se poloměr hvězdy dvakrát, gravitační zrychlení na její povrchu vzroste čtyřnásobně.

[2] Proto se rychlosti c říká rychlost světla ve vakuu.

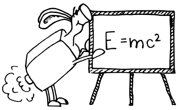
Pomyslná hranice, ze které už z černé díry není úniku, se jmenuje horizont událostí. Jakmile cokoliv (raketa, vesmírná sonda, světlo) překročí tuto hranici, už se to nenávratně stane součástí černé díry. Představovat si, jak černá díra vypadá, tzn. co je uvnitř horizontu událostí, je v principu nemožné. Obtížné vůbec hovořit o tom, zda-li je uvnitř černé díry nějaký prostor a zda-li v ní platí nějaké fyzikální zákony. Můžeme si akorát představit, že gravitační kolaps musel pokračovat i po překonání Schwarzschildova poloměru (jednoduše neexistuje síla, která by ho mohla zastavit) a celá hmota původní hvězdy se smrskla do hrozně malého bodu uprostřed horizontu událostí, tzv. singularity.

Kvůli nepřekonatelné gravitaci je náročné i samotné pozorování černých děr. Jsou vskutku černé! Ale právě silná gravitace může ovlivňovat objekty v jejich okolí, což již pozorovat lze. Navíc materiál, který na černou díru dopadá, vytváří diskovitý oblak, který se spirálovitě přibližuje k horizontu událostí a při tom se zahřívá a vyzařuje světelné záření. Na základě těchto ukazatelů a dalších měřitelných veličin umí astrofyzici černé díry hledat a určovat jejich základní parametry – hmotnost, poloměr a dokonce to, jak černá díra rotuje. Další způsob detekce je také pozorování, jakým způsobem černá díra ohýbá světlo (fotony), které se šíří v její blízkosti. Čím těžší je černá díra, tím je ohyb silnější. Jeho měření proto může sloužit k určení hmotnosti pozorované černé díry. Tomuto jevu se říká gravitační čočkování.

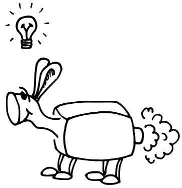
Nejbližší známá černá díra se nachází ve vzdálenosti asi 2 800 světelných let v souhvězdí Jednorožce. Zajímavá je tím, že je složkou dvouhvězdného systému spolu s malou, poměrně chladnou hvězdou. Podobně je tomu i v případě známějšího blízkého systému v souhvězdí Labutě (objekt Cygnus X-1). Pozorovaná černá díra váží asi 15 hmotností Slunce, ale její poloměr je pouze 44 km. V její blízkosti se nachází tzv. modrý obr, velmi těžká a svítivá hvězda, která je pomalu černou dírou požíraná, viz obrázek.

Obr. 2: Umělecká představa systému Cygnus X-1. Zdroj obrázku: European Homepage for the NASA/ESA Hubble Space Telescope

Na první pohled nudný život černých děr je překvapivě bohatý. Existuje celá řada dalších zajímavých efektů (vypařování černých děr, jejich spojování, vyzařování gravitačních vln apod.), které jsou důsledky obecné teorie relativity a kvantové mechaniky. Jejich intenzivní výzkum není zdaleka u konce, takže v budoucnu se můžeme těšit na další překvapivé efekty, ke kterým v černých děrách dochází.



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Zahradní souboj

4 body; průměr 3,37; řešilo 19 studentů

Tři zahrádkáři se nedokázali domluvit, který z nich má prostornější zahradu. První tvrdil, že jeho obdélníková zahrada má strany o délce 40 *yardů a* 545 *palců. Druhý řekl, že ta jeho má strany dlouhé* 0,02 *míle a* 150 *decimetrů a poslední se chlubil rozměry své zahrady, jež byly* 20 *stop a* 415 *pídí.*

Rozhodněte, který ze zahrádkářů má největší zahradu. Svůj výsledek nezapomeňte podložit výpočty!

Abychom mohli porovnávat velikosti zahrad, musíme mít jejich rozměry ve stejných jednotkách. Proto si musíme najít vztahy pro převod těchto neobvyklých jednotek (nejlépe v tabulkách) na základní jednotku délky, tedy metr.

Pro velikost první zahrady platí převodní vztahy

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{yard} &\doteq 0{,}9144\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad 40\,\mathrm{yardů} \doteq 36{,}58\,\mathrm{m}\,, \\ 1\,\mathrm{palec} &\doteq 0{,}0254\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad 545\,\mathrm{palců} \doteq 13{,}84\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Nyní můžeme dopočítat plochu S_1 první zahrady:

$$S_1 = 36{,}58\,\mathrm{m} \cdot 13{,}84\,\mathrm{m} \doteq 506{,}27\,\mathrm{m}^2\,.$$

Pro druhou zahradu platí

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{míle} &\doteq 1\,609{,}344\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad 0{,}02\,\mathrm{mil} \doteq 32{,}19\,\mathrm{m}\,, \\ 1\,\mathrm{dm} &\doteq 0{,}1\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad 150\,\mathrm{dm} \doteq 15\,\mathrm{m}\,, \end{aligned}$$

takže

$$S_2 = 32{,}19\,\mathrm{m} \cdot 15\,\mathrm{m} = 482{,}85\,\mathrm{m}^2\,.$$

Jednotky pro třetí zahradu splňují

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{stopa} &\doteq 0{,}3048\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad 20\,\mathrm{stop} \doteq 6{,}10\,\mathrm{m}\,, \\ 1\,\mathrm{píď} &\doteq 0{,}199\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad 415\,\mathrm{pídí} \doteq 82{,}59\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Plocha třetí zahrady tedy je

$$S_3 = 6{,}10\,\mathrm{m} \cdot 82{,}59\,\mathrm{m} \doteq 503{,}80\,\mathrm{m}^2\,.$$

Porovnáním hodnot vypočtených ploch zjistíme, že největší zahradu vlastní první zahradník.

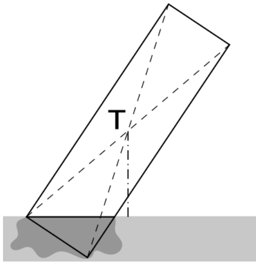
Petra Štefaníková
petras@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... Šikmá věž

7 bodů; průměr 4,47; řešilo 34 studentů

Radka si vyjela na výlet do italské Pisy. Stojíc před věží, která se naklání do strany o 4°, se začala obávat, zda-li se věž nemůže pod tíhou turistů naklánějících se přes horní pravý okraj věže převrhnout.

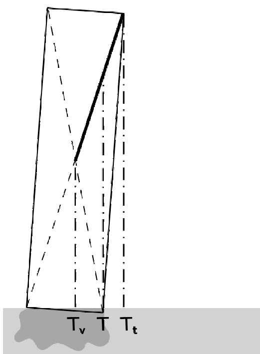
Radka si jako dobrá fyzička uvědomila, že se věž převrhne teprve tehdy, když bude její těžiště (pokládejme věž za homogenní válec s výškou 58 m, průměrem 15 m a hmotností 14 700 t), zkombinované[3] *s těžištěm turistů mimo podstavu věže, která sedí na zemi (viz obrázek 3). Zjistěte, jakou hmotnost musí mít turisté (jejich rozměry klidně zanedbejte), aby se tak stalo. Má se Radka něčeho obávat?*



Obr. 3: Příliš nakloněná věž – její těžiště T je „mimo“ podstavu sedící na zemi

Pomůcka. *Nejjednodušeji se úloha vyřeší tak, že si věž v příslušném poměru narýsujete a geometricky najdete polohu těžiště pro maximální lidskou zátěž.*

Jak nám zadání napovídá, úlohu vyřešíme graficky. Narýsujme si nejdříve šikmou věž v určitém zmenšení (viz obrázek 4). Těžiště věže je v jejím středu, těžiště všech turistů (počítáme je jako hmotný bod) se nachází na samém kraji věže. Nyní obě těžiště promítneme na zem.



Obr. 4: Kombinování těžišť věže a turistů

[3]Společné těžiště dvou bodů s hmotnostmi m_1 a m_2 se nachází na úsečce mezi těmito body tak, že vzájemné vzdálenosti těžiště a jednotlivých bodů jsou v poměru $m_2 : m_1$ (těžiště je blíže k hmotnějšímu z bodů).

Aby se věž mohla začít převažovat, těžiště celé soustavy (tedy zkombinované těžiště věže i turistů) se musí nacházet mimo věž, v hraničním případě pak v místě, kde je věž zabořená do země (viz obrázek).

Nyní na tlusté úsečce změříme poměr „ramen“ mezi těžištěm věže a turistů a jejich celkovým těžištěm. Graficky nám vyšlo, že tento poměr je $p = 1{,}22$ a odpovídá poměru hmotnosti turistů m_t a věže $m_\mathrm{v} = 14\,700\,\mathrm{t}$:

$$p = \frac{m_\mathrm{t}}{m_\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad m_\mathrm{t} = pm_\mathrm{v} = 1{,}22 \cdot 14\,700\,\mathrm{t} \doteq 17\,970\,\mathrm{t}\,.$$

Aby se věž začala převažovat, hmotnost turistů by musela dosáhnout zhruba 17 970 t. Při průměrné váze člověka 70 kg by na věži muselo stát asi 257 000 turistů, což je prakticky nemožné. Šikmá věž v Pise proto pro turisty nepředstavuje žádné nebezpečí.

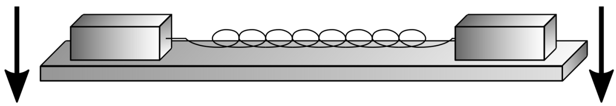
Eva Vochozková
eva@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Padající pružinka

5 bodů; průměr 3,73; řešilo 45 studentů

Eva jednou potkala Petra a chtěla mu ukázat nejnovější pokus demonstrující třecí sílu. Na desku s nalepeným brusným papírem položila dva kvádry, mezi kterými napnula pružinku bez toho, aby se kvádry na desce pohnuly.

Eva ale nepatří mezi ty nejšikovnější a deska s kvádry jí vypadla z rukou a začala padat k zemi (viz obrázek 5). K Evinu překvapení se ale kvádry na desce začaly během pádu pohybovat. Popište, jakým směrem se kvádry rozpohybovaly a vysvětlete, jak je něco takového možné.



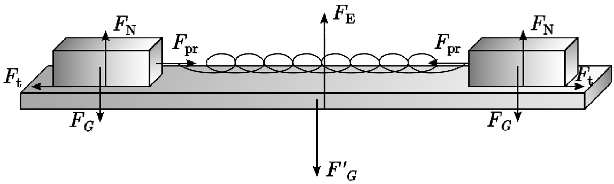
Obr. 5: Nákres padající desky s kvádry

V této úloze uvažujeme pouze posuvný pohyb, tzn. předpokládáme, že deska ani kvádry na ní se nebudou otáčet kolem žádné osy. Zásadní je rozbor vlivu gravitace na působící tření mezi deskou a kvádry. Nejdříve rozebereme případ před pádem, pak při pádu se zanedbáním odporu vzduchu, a nakonec bez zanedbání odporu vzduchu. Takto podrobný rozbor sice nebyl nutný, my si jej ale proberme pro úplnost našeho řešení.

Působící síly před pádem

Před pádem je deska s kvádry držená ve vodorovné poloze. Na desku tedy svisle dolů působí v součtu její vlastní tíha a tíha obou kvádrů. Proti tomu všemu působí nahoru síla Evy, která desku podpírá, aby deska nespadla (viz obrázek 6).

Na každý z kvádrů zase působí čtyři síly: jeho vlastní tíha F_G směrem kolmo dolů, proti ní směrem kolmo nahoru reakční síla od desky F_N. Ta je stejně velká jako F_G, ale opačně orientovaná a brání kvádru, aby prošel skrz desku. Dále na kvádr působí tahová síla pružiny F_{pr} ve vodorovném směru v místě uchycení pružiny a v opačném směru stejně velká třecí síla F_{t}. Stejná velikost sil F_{pr} a F_{t} je nutnou podmínkou toho, aby se kvádry nepohnuly, neboť součet všech sil působících na nepohybující se těleso je vždy nulový.



Obr. 6: Síly působící na kvádry a na desku. Na každý z kvádrů působí ve svislém směru síly F_G a F_{N} a ve vodorovném směru síly F_{pr} a F_{t}. Na desku působí směrem dolů obě síly F_G a také její vlastní tíha F'_G. Směrem nahoru působí síla F_{E}, kterou Eva desku s kvádry podepírá.

Síla F_{t} ale nemůže být neomezeně velká. Její maximální hodnotu určuje součin fF_{N}, kde f nazýváme koeficient smykového tření, který je daný kombinací materiálu kvádru a desky. Například pokud by kvádry byly ze dřeva, koeficient f pro tření mezi dřevem a brusným papírem by byl asi 0,7.[4]

Kdyby Eva natáhla pružinu moc, mohlo by se stát, že by $F_{\mathrm{pr}} > fF_{\mathrm{N}}$ a kvádry by se k sobě přitahovaly, dokud by pružina nepovolila dost na to, aby se z uvedené nerovnosti stala rovnost a kvádry by se zastavily. Tažná síla pružiny je totiž úměrná tomu, o kolik ji Eva natáhne.

Pád desek

Nyní dovolme desce, aby Evě vypadla z rukou a padala jako na obrázku ze zadání. Zanedbáme-li nejdříve odpor vzduchu, tak kvádry i deska padají oba okamžitě volným pádem směrem k zemi se stejným zrychlením. Kvádry tím přestanou na desku tlačit, protože vůči sobě navzájem mají nulové zrychlení a vzhledem k tomu, že v systému žádné další síly přítomny nejsou, kvádry a deska na sebe nemohou navzájem již nijak působit. Vzpomeňme si totiž, že síla je úměrná zrychlení.

Síla F_{N} je tedy nulová a stejně tak je nulová i třecí síla. Na kvádry tedy zůstane působit jen síla pružiny a pružina kvádry k sobě začne *přitahovat*. Bude v tom pokračovat, dokud deska nedopadne na zem, nebo dokud ona pružina nedosáhne své původní neprodloužené délky. Kdyby deska mohla padat dostatečně dlouho, kvádry by začaly kmitat podobně jako závaží na pružině v beztížném stavu, protože rychlost, kterou kvádry během přitahování získají, jim umožní pružinu stlačit více, než jaká byla její klidová délka.

Pokud nezanedbáme odpor vzduchu, výsledek bude podobný, jen se k sobě kvádry přitáhnou pomaleji, protože deska klade vzduchu výrazně větší odpor. Proto již deska padá pomaleji a kvádry do desky slabě tlačí. Tím se bude vytvářet zbytkové F_{t}, i když síla F_{pr} bude větší. Opět: padala-li by deska dostatečně dlouho, kvádry by mohly také začít kmitat. Za přítomnosti tření se však kvádry budou brzdit a nakonec se zastaví. Každý z nich se pak může zastavit

[4] `https://is.muni.cz/th/199446/pedf_b/Fyzika_treni.pdf`

před i za rovnovážnou polohou, ve které by byl při nenatažené pružině, přesně to však závisí na velikosti zbytkového tření a míře původního prodloužení.

Daniel Slezák
dans@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Rezistorová challenge

7 bodů; průměr 5,17; řešilo 40 studentů

K dispozici máte libovolný počet rezistorů s odporem $1\,\Omega$*. Zapojte je tak, aby výsledný odpor zapojení byl přesně* $2{,}7\,\Omega$ *a zkuste při tom použít co nejméně rezistorů. Nejefektivnější zapojení budou bodově ohodnocena.*

Challenge. *Paťo navrhl řešení s použitím pouze osmi rezistorů. Najdete lepší řešení?*

Jedná se o úlohu, kterou není možné řešit analyticky (správným postupem dojít přímo k jednomu nebo dokonce ke všem řešením). Pro nalezení možných zapojení bude nutné použít důvtip a trochu hrubé síly. V důvtipu spočívá využití vlastností sériového a paralelního řazení odporů, což může dramaticky zjednodušit naše řešení. Dalším prostředkem pro snížení pracnosti může být tabulkový procesor (Excel nebo Calc).

Rozsah výpočtů je závislý na výzvě, kterou přijmeme. Přijměme tedy Paťovu výzvu a hledejme zapojení pro $N = 8$ rezistorů. Neuspějeme-li, můžeme pokračovat v hledání zapojení s 9 nebo více rezistory, což bude znamenat jen malé rozšíření výpočtů pro nové případy.

Připomenutí základních vztahů

Dva sériově zapojené odpory mají výsledný odpor $R_{\mathrm{S2}} = R + R = 2R = 2\,\Omega$, tři zase $R_{\mathrm{S3}} = 3R = 3\,\Omega$. Obecně platí, že n sériově zapojených rezistorů má celkový odpor $R_{\mathrm{S}n} = nR$.

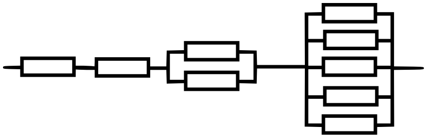
Pokud nahlédneme do učebnic fyziky, zjistíme, že dva paralelní rezistory mají výsledný odpor $R_{\mathrm{P2}} = R/2 = 0{,}5\,\Omega$ a tři $R_{\mathrm{P3}} = R/3 \doteq 0{,}333\,\Omega$. Snadno lze také odvodit, že celkový odpor n stejných rezistorů zapojených paralelně je $R_{\mathrm{P}n} = R/n$. Přehled celkových odporů paralelně zapojených rezistorů uvádíme v tabulce 1. Všimněte si, že některé odpory v tabulce vychází přesně (a mohou být pro nás užitečné), jiné mají neukončený desetinný rozvoj a pro naše hledání nejsou vhodné.

Tab. 1: Odpory různých počtů paralelně zapojených rezistorů

Počet $1\,\Omega$ rezistorů	Celkový odpor $/\Omega$	Počet $1\,\Omega$ rezistorů	Celkový odpor $/\Omega$
2	0,5	6	$\approx 0{,}167$
3	$\approx 0{,}333$	7	$\approx 0{,}143$
4	0,25	8	0,125
5	0,2	9	$\approx 0{,}111$

Hledání výsledných zapojení

Ze vztahu pro sériové zapojení vidíme, že zapojením dvou rezistorů získáme odpor $2\,\Omega$, zbylých $0{,}7\,\Omega$ budeme hledat v tabulce 1. Vidíme, že tento odpor získáme sériovým zapojením dvou paralelních kombinací o výsledných odporech 0,2 Ω a 0,5 Ω, viz obrázek 7. Na toto zapojení potřebujeme celkem 9 rezistorů.



Obr. 7: Zapojení 9 jednoohmových rezistorů s celkovým odporem 2,7 Ω

Kdo se spokojí s výzvou 9 odporů, může skončit, ale odvážní pokračují dále vyšetřováním možností sério-paralelního řazení. Prozkoumáme zapojení dvou větví, kde v první větvi je m sériově spojených rezistorů, ve druhé jich je n a obě tyto větve jsou spojeny paralelně. Celkový odpor jednotlivých větví je roven mR a nR. Pro jejich celkový odpor R_{mn} platí

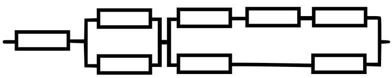
$$\frac{1}{R_{mn}} = \frac{1}{mR} + \frac{1}{nR} \quad \Rightarrow \quad R_{mn} = \frac{(mR)\cdot(nR)}{nR+mR} = \frac{nmR}{n+m}\,.$$

Výsledky pro různé hodnoty n a m shrnuje tabulka 2.

Tab. 2: Celkový odpor zapojení dvou paralelních větví, v nichž je v sérii zapojených n a m rezistorů, každý s odporem 1 Ω

$n \backslash m$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0,5						
2	≈ 0,667	1					
3	0,75	1,2	1,5				
4	0,8	≈ 1,333	≈ 1,714	2			
5	≈ 0,833	≈ 1,429	1,875	≈ 2,222	2,5		
6	≈ 0,857	1,5	2	2,4	≈ 2,727	3	
7	0,875	≈ 1,556	2,1	≈ 2,545	≈ 2,917	≈ 3,231	3,5

S využitím tabulky lze odpor 2,7 Ω poskládat jako sériovou kombinaci jednoho rezistoru s odporem 1 Ω, rezistoru s odporem 0,5 Ω (ten získáme paralelní kombinací 2 rezistorů s odporem 1 Ω) a sério-paralelně zapojených rezistorů, jejichž odpor je 1,2 Ω (pro $n = 3$ a $m = 2$), viz obrázek 8. Na toto zapojení jsme použili 8 rezistorů, čímž jsme zvládli i Paťovu výzvu!



Obr. 8: Zapojení 8 jednoohmových rezistorů s celkovým odporem 2,7 Ω

Jiří Blaha
jirka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.5 ... Porucha topení

6 bodů; průměr 4,09; řešilo 35 studentů

Marek si postavil domek na stromě a rád v něm tráví čas. Na podzim v domku ale bývá docela zima, neboť venku je teplota 10 °C. Marek si uvnitř proto topí topením s výkonem 180 W. Po dlouhém pobytu v domku je tak jeho vnitřek vyhřátý na příjemných 24 °C.

(1) Teplotní rovnováha v domku nastane tehdy, když je výkon, kterým v něm topíme, stejný jako výkon, který se přes okna a zdi ztrácí. Tento ztrátový výkon je úměrný rozdílu teplot uvnitř a vně domku. Vypočítejte, kolikrát má větší ztrátový výkon domek, v němž je udržována teplota 24 °C vůči domku s vnitřní teplotou 17 °C.

(2) Jaká teplota se ustálí v domku po tom, co Marek vypne topení a z domku na dlouhou dobu odejde?

(3) Jednou se topení v domku porouchalo. Marek doufal, že si místnost vytopí pouze výkonem vlastního těla (tedy asi 100 W). Na jaké hodnotě se ustálí teplota uvnitř domku v tomto případě? Předpokládejte, že výkon Markova těla se s měnící teplotou v domku nemění.

(1) Jelikož víme, že ztrátový výkon je úměrný rozdílu teplot, je poměr ztrátového výkonu při 24 °C a při 17 °C úměrný poměru rozdílů teplot, takže

$$\frac{24\,°\mathrm{C} - 10\,°\mathrm{C}}{17\,°\mathrm{C} - 10\,°\mathrm{C}} = \frac{14\,°\mathrm{C}}{7\,°\mathrm{C}} = 2\,.$$

Ztrátový výkon při teplotě 24 °C je tedy dvojnásobný oproti tomu při teplotě 17 °C.

(2) Pokud Marek vypne topení a odejde, bude se z domku stále ztrácet teplo s výkonem úměrným rozdílu teplot. Teplotní rovnováha tedy nastane až v době, kdy je rozdíl teplot venku a uvnitř nulový, tedy teplota uvnitř se ustálí na 10 °C.

(3) Jelikož je ztrátový výkon přímo úměrný rozdílu teplot venku a uvnitř domku, ze situace, kdy byl domek vytápěný, můžeme určit konstantu úměrnosti. Pokud je v domku 24 °C, je výkon vytápění roven součtu výkonu topení a Markova těla, tedy $P = 180\,\mathrm{W} + 100\,\mathrm{W} = 280\,\mathrm{W}$. Protože je domek v tepelné rovnováze, platí pro výkon

$$P = k\Delta t\,,$$

kde $\Delta t = 24\,°\mathrm{C} - 10\,°\mathrm{C} = 14\,°\mathrm{C}$. Z tohoto vztahu pak vyjádříme konstantu úměrnosti

$$k = \frac{P}{\Delta t} = \frac{280\,\mathrm{W}}{14\,°\mathrm{C}} = 20\,\mathrm{W{\cdot}°C^{-1}}\,.$$

Když známe konstantu úměrnosti a výkon Markova těla P_M, můžeme spočítat teplotní rozdíl mezi teplotou uvnitř a vně při rozbitém topení jako

$$\Delta t' = \frac{P_\mathrm{M}}{k} = \frac{100\,\mathrm{W}}{20\,\mathrm{W{\cdot}°C^{-1}}} = 5\,°\mathrm{C}\,.$$

Teplota v domku při porouchaném topení je tedy $10\,°\mathrm{C} + 5\,°\mathrm{C} = 15\,°\mathrm{C}$.

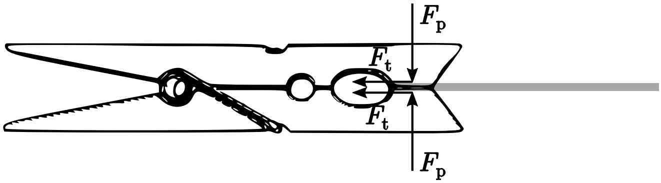
Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Kolíčky

9 bodů; průměr 4,24; řešilo 33 studentů

Změřte, jakou tlakovou *silou působí přiložený kolíček na pověšené prádlo, tedy v našem případě na kancelářský papír. My vám pouze prozradíme, že koeficient tření mezi dřevem, ze kterého je kolíček vyroben, a běžným kancelářským papírem je $f = 0{,}5$.*

Pomoci vám může poznatek, že třecí síla F_t je f-násobek příslušné tlakové síly F_p a přiložený obrázek. Samotný postup měření navrhněte sami. Měření ale rozhodně zopakujte vícekrát a naměřené hodnoty zprůměrujte. Zamyslete se též nad nepřesností vašeho měření.



Obr. 9: Síly působící na papír zachycený v kolíčku.

Teorie

Pro správné vyřešení této úlohy musíme nejdříve rozebrat působení různých sil.

Z obrázku 9 rovnou vidíme, že síla potřebná na vytáhnutí papíru ze sevření kolíčku je $F = 2F_\mathrm{t}$, neboť tření působí na obě strany papíru. Měřit tuto sílu je jednoduché – stačí na papír pevně připevnit závaží o hmotnosti m, které bude papír tahat silou $F = mg$, kde g je tíhové zrychlení. Hmotnost závaží potřebná k vytažení papíru z kolíčku je tedy $m = F/g = 2F_\mathrm{t}/g$.

Dále se lze ze zadání dovědět, že pro třecí sílu platí $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{p}$. Dosadíme-li tento vztah do rovnice pro m, dostaneme

$$m = \frac{2F_\mathrm{t}}{g} = \frac{2fF_\mathrm{p}}{g} \quad\Rightarrow\quad F_\mathrm{p} = \frac{mg}{2f}\,. \tag{1}$$

Dosadíme-li do posledního vztahu hodnotu $f = 0{,}5$, vztah pro tlakovou sílu se ještě víc zjednoduší: $F_\mathrm{p} = mg$. Budeme-li tedy měřit hmotnost závaží, které lze na papír pověsit, budeme okamžitě vědět i hodnotu hledané tlakové síly.

Experiment

Naše experimentální zařízení bylo velice jednoduché. Na svislou desku jsme tavicí pistolí přilepili čtyři kolíčky, abychom se dozvěděli více o tom, zda-li jsou kolíčky stejné. Dále jsme si připravili proužky kancelářského papíru, na které jsme přilepili pytlíky. Jako závaží jsme použili kuchyňskou sůl, kterou jsme postupně přisypávali do pytlíků, čímž rostla síla, kterou byl papír vytahován z kolíčků. V momentě, kdy papír vyklouzl z kolíčku a tíhová síla se rovnala tlakové (viz rovnici 1), jsme pytlík zvážili na kuchyňské váze.

Měření jsme zopakovali pětkrát pro každý kolíček a výsledky měření jsme zapsali do tabulky 3. Průměrná hmotnost, kterou kolíček udrží, je $\langle m \rangle$. Abychom ocenili i rozptyl jednotlivých hodnot, vypočítali jsme i tzv. *standardní odchylku* σ. Postupů pro výpočet této odchylky je více, my jsme použili následující z nich:

Tab. 3: Změřené hmotnosti závaží v gramech. V předposledním řádku jsou uvedeny průměrné hodnoty a v posledním řádku odpovídající standardní odchylky.

	1. kolíček	**2. kolíček**	**3. kolíček**	**4. kolíček**
1	388	298	214	382
2	398	357	202	374
3	351	350	253	334
4	335	310	181	450
5	389	335	163	392
$\langle m \rangle$	**372**	**330**	**203**	**386**
σ	**27**	**23**	**28**	**41**

(1) Nejdříve jsme pro každý kolíček vypočítali druhé mocniny změřených hmotností.
(2) Pak jsme vypočítali průměrnou hodnotu těchto druhých mocnin $\left\langle m^2 \right\rangle$. Všimněte si, že tato hodnota (průměr druhých mocnin) je jiná než druhá mocnina průměrů ($\langle m \rangle^2$).
(3) Standardní odchylka se nakonec vypočítá jako odmocnina rozdílu těchto dvou hodnot, tzn. $\sigma = \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2}$.

Vynásobíme-li hmotnosti tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, dostaneme příslušnou tlakovou sílu pro jednotlivé kolíčky:

$$F_{\mathrm{p1}} = (3{,}65 \pm 0{,}26)\ \mathrm{N}\,, \qquad F_{\mathrm{p3}} = (1{,}99 \pm 0{,}27)\ \mathrm{N}\,,$$
$$F_{\mathrm{p2}} = (3{,}24 \pm 0{,}23)\ \mathrm{N}\,, \qquad F_{\mathrm{p4}} = (3{,}79 \pm 0{,}40)\ \mathrm{N}\,.$$

O kolíčcích tedy můžeme říct, že ve většině případů je jejich tlaková síla velká zhruba 3,5 N, ojediněle můžeme ale nalézt i slabší kolíčky.

Rozptyl měřených hodnot a nepřesnost měření jsou způsobeny vícero faktory. Za prvé, hodnota koeficientu f se jistě mění v závislosti na konkrétním kolíčku a typu použitého papíru. Drobné odchylky ve vlastnostech má i pružinka, kterou kolíček drží pohromadě. Proto se jednotlivá měření od sebe tak moc lišila. Nepřesné bylo i vážení soli. Nepřesnost naší váhy byla asi 1 g. Tato nepřesnost je ale mnohem menší než odchylka způsobena změnami ve vlastnostech kolíčků.

Patrik Švančara
pato@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.C ... Frisbee

6 bodů; průměr 3,79; řešilo 29 studentů

Honza si trénoval házení frisbee. V jedné obskurní knížce o technice házení si přečetl, že lepší hod a delší dolet má frisbee s vyšší celkovou energií – frisbee totiž letí těsně po hodu tak, že se otáčí kolem svého středu obvodovou rychlostí v_o a navíc se pohybuje vpřed posuvnou rychlostí v_p.

Honza umí házet frisbee tak, že $v_\mathrm{o} = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_\mathrm{p} = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Neumí se ale rozhodnout, co si má trénovat: má usilovat o zvýšení obvodové, nebo posuvné rychlosti o $\Delta v = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Jinými slovy, má se snažit házet rychlejší nebo více roztočené frisbee?

Předpokládejte, že frisbee má přibližně tvar tenkého disku (válce) o poloměru 10 cm *a hmotnosti* 200 g.

Úlohu budeme řešit tak, že si spočítáme, o kolik by se zvedla energie frisbee v případě, kdy Honza zvýší obvodovou rychlost a o kolik by se zvedla energie v případě, kdy zvýší posuvnou rychlost. Začneme obvodovou rychlostí.

Při zvyšování obvodové rychlosti dochází ke zvyšování rotační energie, pro kterou najdeme v textu Výfučtení vztah

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} J\omega^2 \,,$$

kde J značí moment setrvačnosti a ω je úhlová rychlost. Frisbee lze považovat za tenký válec, takže jeho moment setrvačnosti lze vyjádřit jako

$$J = \frac{mr^2}{2} \,,$$

kde $m = 200\,\mathrm{g}$ je hmotnost a $r = 10\,\mathrm{cm}$ je poloměr frisbee.

Dále pro úhlovou rychlost platí $\omega = v_\mathrm{o}/r$. Dosadíme-li všechny tyto vztahy do vztahu pro energii, získáme obecný vzorec závisející jen na známých veličinách:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 \cdot \left(\frac{v_\mathrm{o}}{r}\right)^2 = \frac{mr^2 v_\mathrm{o}^2}{4r^2} = \frac{mv_\mathrm{o}^2}{4} \,.$$

Nyní spočítejme, o kolik by se zvýšila rotační energie, kdyby Honza zvýšil obvodovou rychlost o Δv. Jednoduše odečteme rozdíl energií před a po zvýšení rychlosti z v_o na $v_\mathrm{o} + \Delta v$:

$$\Delta E_\mathrm{r} = \frac{m\left(v_\mathrm{o} + \Delta v\right)^2}{4} - \frac{mv_\mathrm{o}^2}{4} = \frac{m\left[\left(v_\mathrm{o} + \Delta v\right)^2 - v_\mathrm{o}^2\right]}{4} =$$

$$= \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \left[\left(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 - \left(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2\right]}{4} \doteq 0{,}063\,\mathrm{J} \,.$$

Podobně budeme postupovat i v případě posuvné části kinetické energie, která již ve svém základním tvaru

$$E_\mathrm{pos} = \frac{1}{2} mv_\mathrm{p}^2$$

závisí pouze na hmotnosti a posuvné rychlosti:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m\left(v_\mathrm{p} + \Delta v\right)^2 - \frac{1}{2} mv_\mathrm{p}^2 = \frac{m\left[\left(v_\mathrm{p} + \Delta v\right)^2 - v_\mathrm{p}^2\right]}{2} =$$

$$= \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \left[\left(2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 - \left(2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2\right]}{2} \doteq 0{,}225\,\mathrm{J} \,.$$

Porovnáme-li, jak se změní energie spolu se zvýšením jednotlivých rychlostí, dojdeme k závěru, že by měl Honza zapracovat na tom, s jakou posuvnou rychlostí frisbee hází.

Petr Doubravský
petrd@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	7	5	7	6	9	6	**44**	**175**
1.	*Pavel Šimůnek*	ZŠ K. J. Erbena, Miletín	4	6	4	5	3	–	–	**22**	**70**
2.	*Patrik Rosenberg*	ZŠ Tuháčkova, Brno	4	–	2	–	–	–	1	**7**	**59**
3.	*Zuzana Weisová*	ZŠ Židlochovice	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**39**
4.	*Kateřina Stefanová*	ZŠ tř. SNP, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
5.	*Barbora Tuháčková*	G Františka Křižíka, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
6.	*Martin Ondruška*	ZŠ Valašská Polanka	4	1	–	–	–	–	–	**5**	**14**
7.	*Šimon Dalecký*	ZŠ a MŠ Klíč s.r.o. Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
8.	*Martin Fojtík*	ZŠ Valašská Polanka	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**7**
9.	*Daniel Mikuš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Kategorie sedmých ročníků

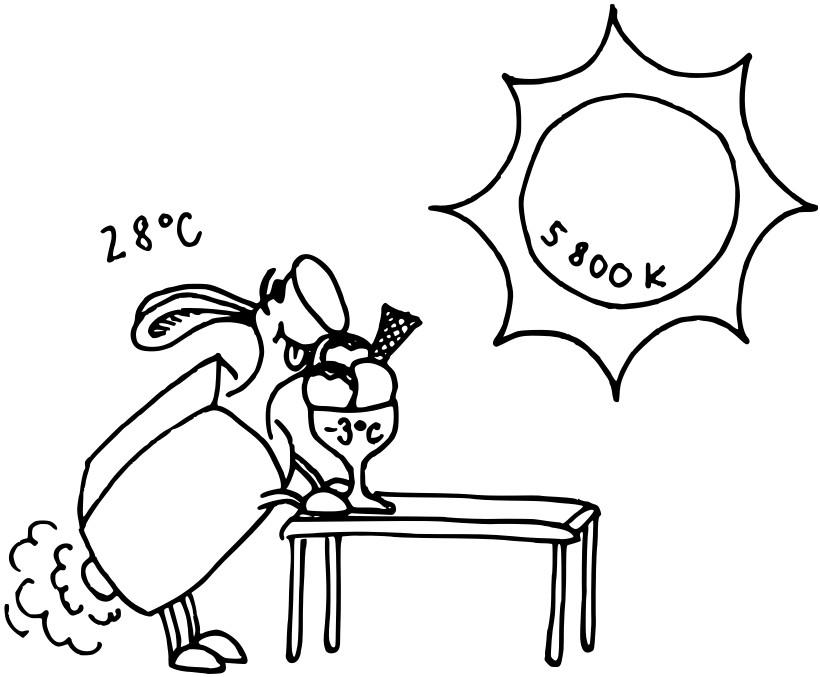
	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	7	5	7	6	9	6	**44**	**175**
1.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	4	6	5	6	2	4	5	**32**	**140**
2.	*Jakub Ježek*	ZŠ Bezručova, Hradec Králové	3	6	4	6	4	–	6	**29**	**127**
3.	*Pavel Provazník*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	2	5	3	5	4	2	6	**27**	**125**
4.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	4	7	–	7	6	–	–	**24**	**97**
5.	*Pavla Maříková*	G J. Vrchlického, Klatovy	3	7	3	6	–	–	–	**19**	**90**
6.	*Anna Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	5	4	4	2	–	**23**	**56**
7.	*Tereza Dvořáková*	ZŠ Sokolovská, Velké Meziříčí	2	2	3	5	–	–	–	**12**	**55**
8.–9.	*Kevin Děcký*	ZŠ Ostrava-Muglinov	2	3	4	5	–	2	1	**17**	**54**
8.–9.	*Martin Haikl*	G Týn nad Vltavou	3	–	5	4	2	–	–	**14**	**54**
10.	*Barbora Šišáková*	ZŠ T. G. Masaryka Vracov	–	–	–	–	–	–	–	–	**38**
11.	*Matyáš Hebert*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
12.	*Anna Gryčová*	ZŠ Husova, Liberec 5	3	–	–	–	–	3	–	**6**	**34**
13.	*Aleš Chaloupka*	G J. Blahoslava, Ivančice	4	–	3	–	–	–	–	**7**	**29**
14.	*Jiří Vestfál*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	3	3	4	2	3	3	1	**19**	**28**
15.–16.	*Jakub Švec*	ZŠ Štefánikova, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
15.–16.	*Jan Vrňata*	ZŠ Týnec nad Sázavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
17.–18.	*Tomáš Veselý*	ZŠ a MŠ Myslibořice	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
17.–18.	*Josef Vochozka*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
19.	*Jolana Chylíková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	3	–	–	–	–	–	–	**3**	**15**
20.	*Andrea Bártová*	ZŠ K Milíčovu, Praha 4 - Jižní M	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
21.–22.	*Tomáš Hlaváček*	ZŠ Erbenova, Blansko	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**8**
21.–22.	*Jan Tomšej*	ZŠ Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		7	5	7	6	9	6	**40**	**159**
1.	*Eva Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	7	5	7	5	8	6	**38**	**144**
2.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	–	7	5	7	6	4	2	**31**	**131**
3.	*Filip Brázda*	ZŠ a MŠ Kameničky	–	5	5	6	5	3	6	**30**	**130**
4.	*Sára Byšková*	ZŠ nám.Jiřího z Poděbrad, Praha	–	5	4	6	5	4	6	**30**	**107**
5.	*Adam Mára*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	4	3	6	1	1	2	**17**	**91**
6.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	–	–	2	5	4	4	–	**15**	**80**
7.–8.	*Adam Krška*	G, Mikulov	–	–	–	–	–	7	3	**10**	**78**
7.–8.	*Ondřej Valášek*	G, Nový Bydžov	–	2	3	7	–	3	4	**19**	**78**
9.	*Natálie Křivancová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**68**
10.–11.	*Kryštof Rakovský*	ZŠ Jiráskovy sady, Příbram II	–	1	2	1	2	1	0	**7**	**61**
10.–11.	*Ema Volešová*	PORG, Praha	–	–	3	6	4	–	0	**13**	**61**
12.	*Adam Korbel*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	2	3	6	5	4	–	**20**	**54**
13.	*Alex Rosenbergová*	ZŠ Tuháčkova, Brno	–	2	3	–	–	2	–	**7**	**49**
14.	*Jan Hyžák*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	4	–	2	4	–	**10**	**48**
15.	*Aleš Opl*	Gymnázium Praha 3	–	–	–	–	–	–	–	–	**42**
16.	*Jakub Pelc*	G, Benešov	–	–	–	5	3	–	–	**8**	**40**
17.	*Markéta Bečvářová*	G, Písek	–	–	2	5	2	–	–	**9**	**39**
18.	*Luboš Petráň*	Biskupské G, České Budějovice	–	–	5	–	–	–	–	**5**	**31**
19.	*Radomír Mielec*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
20.	*Adam Baroš*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
21.	*Jakub Dorňák*	ZŠ Valašská Polanka	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
22.	*Tomáš Kudrnáč*	ZŠ Mozartova, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
23.	*Markéta Mastešová*	ZŠ Velký Ořechov	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		7	5	7	6	9	6	**40**	**159**
1.–2.	*Lubor Čech*	G, Mikulov	–	4	5	7	5	9	6	**36**	**145**
1.–2.	*Martina Daňková*	Klasické a španělské G, Brno	–	7	3	6	6	6	6	**34**	**145**
3.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	–	7	5	–	6	–	–	**18**	**127**
4.	*Šárka Štěpánková*	G J. Ressela, Chrudim	–	6	4	7	3	6	2	**28**	**123**
5.–7.	*David Kamenský*	G a JŠ, Břeclav	–	5	5	5	5	6	5	**31**	**122**
5.–7.	*Hana Slámová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	4	7	5	6	–	**22**	**122**
5.–7.	*Lucie Urbanová*	G Chotěboř	–	7	4	6	5	5	6	**33**	**122**
8.	*Patrik Kašpárek*	Katolické gymnázium Třebíč	–	6	4	2	5	6	5	**28**	**119**
9.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	4	3	5	–	5	6	**23**	**110**
10.	*Marco Souza de Joode*	G Nad Štolou, Praha	–	3	5	7	4	9	2	**30**	**106**
11.	*Vojtěch Kuchař*	ZŠ Sobotka	–	6	4	4	6	3	6	**29**	**104**
12.	*Petr Krotký*	G, Hustopeče	–	4	3	5	3	3	6	**24**	**103**
13.	*Jan Raja*	G, Nymburk	–	–	3	2	–	2	5	**12**	**92**
14.	*Julie Rubášová*	Biskupské G, Brno	–	4	3	5	4	–	4	**20**	**91**
15.	*Karolína Letochová*	G Šternberk	–	–	5	1	5	7	–	**18**	**88**
16.	*Filip Holoubek*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	3	5	4	3	2	**17**	**76**
17.	*Filip Řeháček*	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**75**
18.	*Eliška Novotná*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**67**
19.	*Matěj Moravec*	G Chotěboř	–	3	4	6	5	3	–	**21**	**66**
20.	*František Krůs*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**62**
21.	*Tereza Bouberlová*	Biskupské G, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**55**
22.	*Jakub Charvot*	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	**46**
23.	*Kateřina Fialová*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	**38**
24.	*Jiří Zinecker*	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
25.	*Štěpán Nekula*	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
26.–27.	*Petr Svoboda*	ZŠ a MŠ Beroun - Město	–	1	3	–	–	–	0	**4**	**28**
26.–27.	*Magdalena Šlaufová*	G, Semily	–	–	–	5	–	–	–	**5**	**28**
28.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
29.	*Gabriela Hladká*	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
30.	*Martin Bencko*	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	4	–	–	–	–	**4**	**22**
31.	*Radim Šafář*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
32.	*Jitka Vysloužilová*	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
33.	*Kateřina Sekničková*	ZŠ E. Rošického, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**


28°C
5 800 K
-3°C

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.