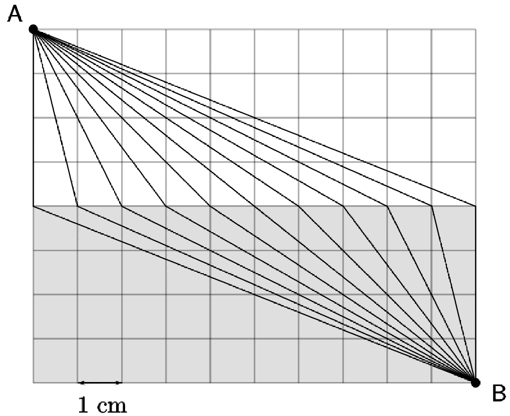
Úloha V.C ... Fermatův test

7 bodů; průměr 5,44; řešilo 25 studentů

Ve Výfučtení uvádíme, že odvození Snellova zákona z Fermatova principu nejmenšího času je náročné. Zkusme tedy ověřit obrácené tvrzení.

V našem zjednodušeném modelu položme rychlost světla ve vakuu rovnou $c = 1\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Uvažujme dále dva body A *a* B*, které umístíme na čtvercovou síť do bodů* $\mathsf{A} = [0\,\mathrm{cm}; 4\,\mathrm{cm}]$ *a* $\mathsf{B} = [10\,\mathrm{cm}; -4\,\mathrm{cm}]$*, každý do jiného optického prostředí (vizte obrázek 1). Index lomu bílé části mříže je $n_0 = 1$, index lomu šedé části je $n_1 = \sqrt{3} \doteq 1{,}73$.*



Obr. 1: Jedenáct různých cest pro světelný paprsek

(1) *Uvažujme jedenáct různých paprsků (viz obrázek 1), které se šíří mezi body* A *a* B*. Vypočítejte pro každý z paprsků čas jeho letu v sekundách a výsledné hodnoty zakreslete do grafu (na vodorovnou osu můžete vynést x-ovou souřadnici místa, ve kterém paprsek prošel přes rozhraní optických prostředí).*

(2) *Mezi vypočítanými časy najděte ten nejmenší. Pečlivě změřte nebo vypočítejte úhel dopadu α a úhel lomu β.*

(3) *Vypočítejte součiny $n_0 \sin\alpha$ a $n_1 \sin\beta$. Shodují-li se tyto hodnoty, pak platí Snellův zákon. Je tomu skutečně tak?*

Pro výpočet času letu budeme potřebovat znát dráhu jednotlivých paprsků. Tu můžeme buďto velice přesně změřit z obrázku (avšak nezapomenout na udané měřítko) a nebo spočítat pomocí Pythagorovy věty. Paprsky zleva doprava označíme čísly od 1 do 11.

Ve vakuu, tzn. v bílé části obrázku, jsou dráhy paprsků určeny jako přepony pravoúhlých trojúhelníků,[1] jejichž jedna odvěsna měří vždy 4 cm a druhá odvěsna je dlouhá postupně 0 cm, 1 cm, ..., 10 cm. Uražená dráha ve vakuu je tedy

$$d_0 = \sqrt{(4\,\mathrm{cm})^2 + x^2}\,,$$

[1] Toto tvrzení neplatí hned pro první paprsek. Nicméně, svislou dráhu paprsku si můžeme představit jako přeponu trojúhelníku, jehož odvěsny jsou dlouhé 4 cm a 0 cm.

Tab. 1: Délky drah jednotlivých paprsků ve vakuu, v optickém prostředí a doby jejich letů.

paprsek	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
d_0/cm	4,0	4,1	4,5	5,0	5,7	6,4	7,2	8,1	8,9	9,8	10,8
t_0/s	4,0	4,1	4,5	5,0	5,7	6,4	7,2	8,1	8,9	9,8	10,8
d_1/cm	10,8	9,8	8,9	8,1	7,2	6,4	5,7	5,0	4,5	4,1	4,0
t_1/s	18,7	17,0	15,4	14,0	12,5	11,1	9,9	8,7	7,8	7,1	6,9
t/s	22,7	21,1	19,9	19,0	18,2	17,5	17,1	16,8	**16,7**	16,9	17,7

kde $x = \{0\,\mathrm{cm}, 1\,\mathrm{cm}, \ldots, 10\,\mathrm{cm}\}$.

Podobně je tomu i v šedé části obrázku. Zde mají pravoúhlé trojúhelníky také jednu odvěsnu dlouhou 4 cm, druhá odvěsna měří postupně 10 cm, 9 cm, …, 0 cm, tedy vždy doplněk délky x do 10 cm. Matematicky tedy lze zapsat uraženou dráhu v optickém prostředí jako

$$d_1 = \sqrt{(4\,\mathrm{cm})^2 + (10\,\mathrm{cm} - x)^2}\,,$$

kde x opět značí postupně hodnoty 0 cm až 10 cm.

Dobu letu paprsku vypočítáme již snadno jako součet časů letu ve vakuu a v optickém prostředí. Nesmíme zapomenout, že ve vakuu se světlo šíří rychlostí c a v optickém prostředí zase rychlostí c/n_1:

$$t = t_0 + t_1 = \frac{d_0}{c} + \frac{d_1}{c/n_1} = \frac{\sqrt{(4\,\mathrm{cm})^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{(4\,\mathrm{cm})^2 + (10\,\mathrm{cm} - x)^2}}{c/n_1}\,.$$

Do výše uvedeného vztahu pak stačí dosazovat jednotlivá x a počítat časy letu jednotlivých paprsků. My tyto hodnoty uvádíme v tabulce 1. V tabulce jsme také vyznačili, že dráhu mezi body A a B urazí nejrychleji paprsek číslo 9.

Úhel dopadu α a odrazu β bylo možné například změřit z obrázku. My úhly vypočítáme pomocí trigonometrické funkce tangens. Platí, že tangens úhlu je rovný poměru protilehlé odvěsny k přilehlé. V našem případě je délka protilehlé odvěsny k úhlu α 8 cm a délka přilehlé odvěsny 4 cm:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{cm}} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \mathrm{arctg}\,(2) \doteq 63{,}4^\circ\,.$$

Podobně vypočteme i velikost úhlu β. Délka protilehlé odvěsny je $10\,\mathrm{cm} - 8\,\mathrm{cm} = 2\,\mathrm{cm}$ a délka přilehlé odvěsny je opět 4 cm:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{cm}} \quad\Rightarrow\quad \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \doteq 26{,}6^\circ\,.$$

Nakonec ověříme, zda platí Snellův zákon. Z Výfučtení víme, že

$$\text{levá strana} = n_0 \sin\alpha = 1 \cdot \sin(63{,}4^\circ) \doteq 0{,}89\,,$$
$$\text{pravá strana} = n_1 \sin\beta = 1{,}73 \cdot \sin(26{,}6^\circ) \doteq 0{,}77\,.$$

Pozorujeme tedy, že levá a pravá strana se nerovnají! Neplatí zde Snellův zákon? Právě naopak, není důvod, aby neplatil. Pravděpodobnější je, že nejrychlejší paprsek z jedenácti kandidátů pořád není ten nejrychlejší možný. Kdybychom uvažovali více paprsků, zjistíme, že nejrychleji světlo letí někde mezi osmým a devátým paprskem (tento paprsek protne rozhraní mezi vakuem a optickým prostředím ve vzdálenosti asi 7,62 cm od levého okraje obrázku). Tomuto paprsku odpovídá úhel dopadu 62,3° a úhel lomu 30,8°. A jak si můžete sami vyzkoušet, tyto úhly Snellův zákon opravdu splňují.

Petr Doubravský
petrd@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.