

## Úloha V.3 ... Jeskyně

5 bodů; průměr 2,82; řešilo 39 studentů

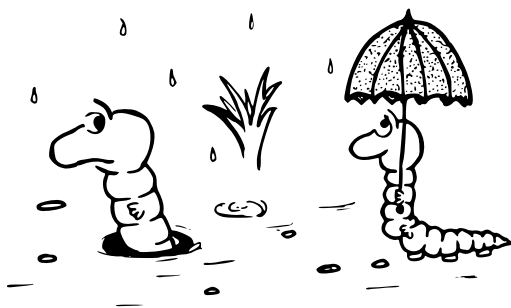
Ve výfučkomutí jeskyni žije zvláštní druh housenek. Ty žijí společně ve velkých skupinách a stejně tak se spolu vydávají za potravou. Cestu k potravě mají ale poněkud nestandardní, neboť cestují ve dvou vrstvách na sobě.

Dolní vrstva housenek leze po zemi rychlostí  $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , zatímco horní vrstva se pohybuje po dolní vrstvě opět rychlostí  $v$ . Když se housenka z horní vrstvy dostane až úplně dopředu, tak seskočí dolů a zařadí se do vrstvy spodní. Naopak, poslední housenka ve spodní vrstvě vyleze do horní vrstvy. Housenek je mnoho a jsou velmi malé. Jeden housenkový útvar má délku  $d = 3 \text{ m}$  a v porovnání s ním má jediná housenka zanedbatelnou délku.

Když se na konci dne skupina housenek vrací z pastvy zpět do jeskyně, uspořádají se do svého útvaru tak, že jejich předek je vzdálen od vstupu do jeskyně o  $l = 15 \text{ m}$ . Za jak dlouho proleze vstupem do jeskyně housenka, která se na začátku nachází na konci útvaru, tzn. housenka, která právě nastupuje na horní vrstvu housenek?

Pro řešení bude třeba si podrobně rozebrat pohyb naší housenky celým pásem.

Nejprve si rozebereme pohyb pásu z pohledu naší housenky, pokud sestoupí do spodního pásu. V takovém případě se pohybuje vůči zemi rychlostí  $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jak dlouho v tomto pásu setrvá, než bude muset přskočit podle pohybu do toho horního? Musí se zachovat konstantní délka pásu jako celku. Je tedy jasné, že jakou rychlostí ubývá spodní pás housenek za naší housenkou (což jsou housenky, které vylézají nahoru do horní vrstvy pásu), tou stejnou rychlostí přibývá před ní z horní vrstvy (což jsou housenky sestupující v čele pásu). Pokud se horní řada housenek pohybuje také rychlostí  $v$ , musí i takovou rychlostí přibývat spodní pás před housenkou (opět kvůli zachování konstantní délky pásu housenek). Housenka tedy bude spodním pásem postupovat dozadu rychlostí  $v$ , což se ale ve skutečnosti ve změně rychlosti pohybu pásu jako celku vůbec neprojeví. Housence toto propracovávání se na konec bude trvat čas  $t = d/v$ . Za tuto dobu pás rychlostí  $v$  analogicky urazí dráhu o velikosti délky pásu  $d$ . Až se housenka dostane na konec pásu, bude se rychlostí  $v$  pohybovat vrchní vrstvou housenek.



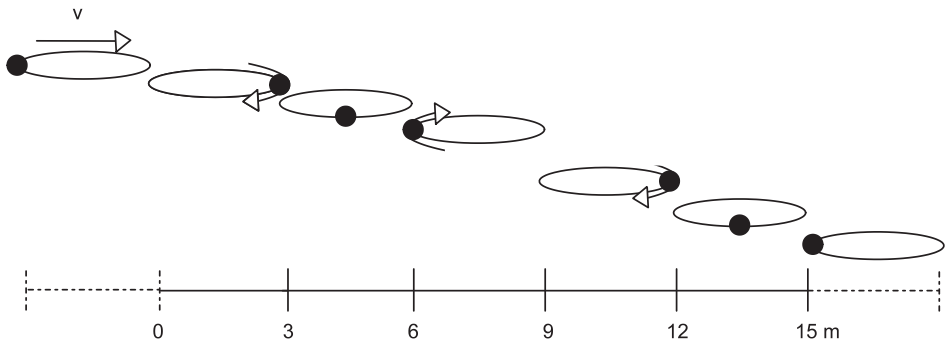
Odtud si musíme dát pozor na to, že teď se housenka v horní vrstvě pohybuje vůči zemi dvojnásobnou rychlostí. Musíme její rychlost vztahovat k zemi, protože pás jako celek se pohybuje po zemi a my potřebujeme vědět, kolik pás urazí směrem k jeskyni (neboli vše vztahujeme v dané soustavě k jednomu místu, k zemi). Pás se sice pohybuje po zemi jako celek pořád rychlostí  $v$ , ale naše housenka ne – ta má rychlost  $2v = 2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Čas  $t = d/v$ , za který housenka proleze celou délkou spodního pásu, je stejný jako čas, když je ve spodní vrstvě (jinak by se

nám housenky hromadily na jednom místě). Dle této úvahy, že housenka se vůči zemi pohybuje rychlostí  $2v$  čas  $t$ , tedy musí platit, že  $t = 2d/2v$  a pás jako celek urazí délku  $2d$ , než se housenka dostane po vrchní vrstvě dopředu pásu. Opět se totiž musí zachovat kolování housenek tak, aby jich před naší housenkou stejně ubylo a zároveň jich za ní stejně přibylo. Jakmile se touto rychlostí  $2v$  dostane do přední části pásu, přeskočí dolů a zase se bude pohybovat po zemi rychlostí  $v$  dopředu spolu s pásem. Celé toto její „kolečko“ jí zabere čas  $T$ , což je vlastně součet času pohybu po spodní a horní vrstvě, tzn.

$$T = 2t = 2 \cdot \frac{d}{v} = 2 \cdot \frac{300 \text{ cm}}{1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}} = 600 \text{ s}.$$

Teď se musíme podívat na to, kolikrát housenka stihne projít toto „kolečko“, než se dostane ke vchodu do jeskyně. Pás jako celek se za dobu  $T$  posune o vzdálenost  $d$ , když je housenka ve spodní vrstvě, a o  $2d$ , když housenka prochází horní vrstvou. Celkové posunutí pásu  $D$  je tedy  $D = d + 2d = 9m$ .

Délka, kterou naše housenka musí urazit, ale není jen velikost vzdálenosti čela pásu od vstupu do jeskyně  $l = 15 \text{ m}$ , housenka se nachází totiž na jeho konci, a tak musíme k délce  $l$  přidat i délku pásu housenek  $d$ . Celá dráha, kterou naše housenka urazí, je dohromady  $l + d = 18 \text{ m}$ . Tato dráha je rovna  $2D$ , takže naše housenka ji zvládne za dvě „kolečka“, tedy za čas  $2T = 1200 \text{ s}$ . Pohyb housenky v pásu podrobněji uvádíme v obrázku 1.



Obr. 1: Postupný pohyb housenky (jako černého puntíku) pásem. Uražená vzdálenost je vyznačená na vodorovné ose.

### Poznámky k došlým řešením

Mnozí z vás naší housenku nahradili celým pásem a dál nepočítali s tím, že v každé vrstvě má housenka jinou rychlost. Největší problém však pro vás byl představit si celý pohyb po fázích a správně. Mnozí z vás tvrdili, že housenka se nachází po jinak dlouhou dobu v horním a jinak dlouhou dobu ve spodním pásu útvaru. To samozřejmě není možné, jinak by se housenky začaly hromadit na jednom konci útvaru a celý útvar by přestal fungovat.

V některých řešeních se objevila analogie pohybu tankového pásu. Housenkový pás se od tanku liší tím, že spodní část pásu tanku se po zemi nepohybuje, kdežto naše housenky ano

(odvozování délek, které housenka musí projít v horním a dolním pásu vůči zemi, je podrobněji popsáno v samotném vzorovém řešení). Pokud jste počítali, zapomínali jste, že vrchní housenkový pás sice ujde po tom spodním 3 m, ale tato vzdálenost neodpovídá tomu, o kolik se housenka přiblížila k jeskyni (nebo posunula vůči náhodnému pevně danému bodu na zemi, což je zde v úloze totéž).

Chci pochválit ty, kteří mají plný počet bodů či o bod méně, jelikož si s touto úlohou poradili jednoduše a elegantně.

*Pavla Trembulaková*  
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.