Úloha IV.C ... Frisbee

6 bodů; průměr 3,79; řešilo 29 studentů

Honza si trénoval házení frisbee. V jedné obskurní knížce o technice házení si přečetl, že lepší hod a delší dolet má frisbee s vyšší celkovou energií – frisbee totiž letí těsně po hodu tak, že se otáčí kolem svého středu obvodovou rychlostí v_o a navíc se pohybuje vpřed posuvnou rychlostí v_p.

Honza umí házet frisbee tak, že $v_o = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_p = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Neumí se ale rozhodnout, co si má trénovat: má usilovat o zvýšení obvodové, nebo posuvné rychlosti o $\Delta v = 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Jinými slovy, má se snažit házet rychlejší nebo více roztočené frisbee?

Předpokládejte, že frisbee má přibližně tvar tenkého disku (válce) o poloměru 10 cm *a hmotnosti* 200 g.

Úlohu budeme řešit tak, že si spočítáme, o kolik by se zvedla energie frisbee v případě, kdy Honza zvýší obvodovou rychlost a o kolik by se zvedla energie v případě, kdy zvýší posuvnou rychlost. Začneme obvodovou rychlostí.

Při zvyšování obvodové rychlosti dochází ke zvyšování rotační energie, pro kterou najdeme v textu Výfučtení vztah

$$E_r = \frac{1}{2} J\omega^2 \,,$$

kde J značí moment setrvačnosti a ω je úhlová rychlost. Frisbee lze považovat za tenký válec, takže jeho moment setrvačnosti lze vyjádřit jako

$$J = \frac{mr^2}{2} \,,$$

kde $m = 200\,\mathrm{g}$ je hmotnost a $r = 10\,\mathrm{cm}$ je poloměr frisbee.

Dále pro úhlovou rychlost platí $\omega = v_o/r$. Dosadíme-li všechny tyto vztahy do vztahu pro energii, získáme obecný vzorec závisející jen na známých veličinách:

$$E_r = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 \cdot \left(\frac{v_o}{r}\right)^2 = \frac{mr^2 v_o^2}{4r^2} = \frac{m v_o^2}{4} \,.$$

Nyní spočítejme, o kolik by se zvýšila rotační energie, kdyby Honza zvýšil obvodovou rychlost o Δv. Jednoduše odečteme rozdíl energií před a po zvýšení rychlosti z v_o na $v_o + \Delta v$:

$$\Delta E_r = \frac{m\left(v_o + \Delta v\right)^2}{4} - \frac{m v_o^2}{4} = \frac{m\left[\left(v_o + \Delta v\right)^2 - v_o^2\right]}{4} =$$

$$= \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \left[\left(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 - \left(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2\right]}{4} \doteq 0{,}063\,\mathrm{J} \,.$$

Podobně budeme postupovat i v případě posuvné části kinetické energie, která již ve svém základním tvaru

$$E_{pos} = \frac{1}{2} m v_p^2$$

závisí pouze na hmotnosti a posuvné rychlosti:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m\left(v_p + \Delta v\right)^2 - \frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{m\left[\left(v_p + \Delta v\right)^2 - v_p^2\right]}{2} =$$

$$= \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \left[\left(2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} + 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 - \left(2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2\right]}{2} \doteq 0{,}225\,\mathrm{J} \,.$$

Porovnáme-li, jak se změní energie spolu se zvýšením jednotlivých rychlostí, dojdeme k závěru, že by měl Honza zapracovat na tom, s jakou posuvnou rychlostí frisbee hází.

Petr Doubravský
petrd@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.