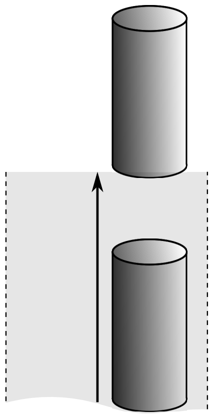
Úloha III.4 ... Sloup

7 bodů; průměr 4,64; řešilo 55 studentů

Historici nedávno objevili na dně rybníka starodávný sloup ve tvaru válce s poloměrem podstavy $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a výškou $h = 2\,\mathrm{m}$. K jejich překvapení sloup nebyl povalen, ale bezpečně stál svou podstavou na dně rybníka. Aby ho vytáhli na břeh, přivolaní potápěči připevnili na sloup lano a pomocí jeřábu ho zvedli nad hladinu (viz obrázek).

Viktor celou situaci sledoval ze břehu rybníka a vypočítal práci, kterou jeřáb při zvedání sloupu z rybníka vykonal. Spočítejte ji také. Víte, že sloup je homogenní a má hmotnost $m = 4\,000\,\mathrm{kg}$. Rybník má hloubku $H = 7\,\mathrm{m}$ a v porovnání s rozměry sloupu je řádově větší.



Tuto úlohu bylo možné vyřešit pomocí sil a pomocí energií. Ukážeme si obě řešení.

Řešení pomocí sil

Naším úkolem je spočítat práci, proto budeme vycházet ze vztahu mezi silou F, dráhou s a prací $W = Fs$.

Protože sloup je ponořen do vody, tak na něj bude působit kromě tíhové síly též síla vztlaková. Obě síly ovšem působí v opačném směru, takže se budou odečítat. Sloup stojí na dně, takže tíhová síla určitě převažuje nad silou vztlakovou. Výsledná síla, která bude působit na sloup ve vodě, tedy bude $F_1 = F_g - F_{\mathrm{vz}} = mg - \varrho_{\mathrm{v}} Vg$, kde $\varrho_{\mathrm{v}} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody a $V = \pi r^2 h$ je objem sloupu, neboť se jedná o válec. Takovouto silou budeme sloup zvedat, dokud bude celý ponořen ve vodě, tedy po dráze $s_1 = H - h = 5\,\mathrm{m}$.

Poté, co horní podstava válce dosáhne hladiny, nebude válec ponořen celý, a tak bude vztlaková síla působit jen na stále se zmenšující ponořenou část sloupu. Abychom zjistili, jak velká bude *průměrná* síla, která bude v průběhu vytahování sloupu nad hladinu rybníka působit, budeme muset vypočítat, jak velký objem sloupu bude během této fáze průměrně ponořen.

Tento výpočet ale není vůbec složitý! Na začátku bude sloup ponořen celý, na konci bude celý vně. Průměrně bude tedy ponořena polovina sloupu. Proto průměrná vztlaková síla bude poloviční, tedy $F_{\mathrm{vz}}/2$ a výsledná síla působící na sloup bude velká $F_2 = mg - \varrho_{\mathrm{v}} Vg/2$ a bude působit na dráze $s_2 = h = 2\,\mathrm{m}$.

Nyní již můžeme dopočítat výslednou práci:

$$W = F_1 s_1 + F_2 s_2 = (mg - V\varrho g) \cdot (H - h) + \left(mg - \frac{1}{2}V\varrho g\right) h =$$
$$= \left(mg - \pi r^2 h \varrho g\right) \cdot (H - h) + \left(mg - \frac{1}{2}\pi r^2 h \varrho g\right) h =$$
$$= \left[4\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} - \pi\,(0{,}5\,\mathrm{m})^2 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\right] \cdot 5\,\mathrm{m} +$$
$$+ \left[4\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} - \frac{1}{2}\pi\,(0{,}5\,\mathrm{m})^2 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\right] \cdot 2\,\mathrm{m} = 182\,\mathrm{kJ}\,.$$

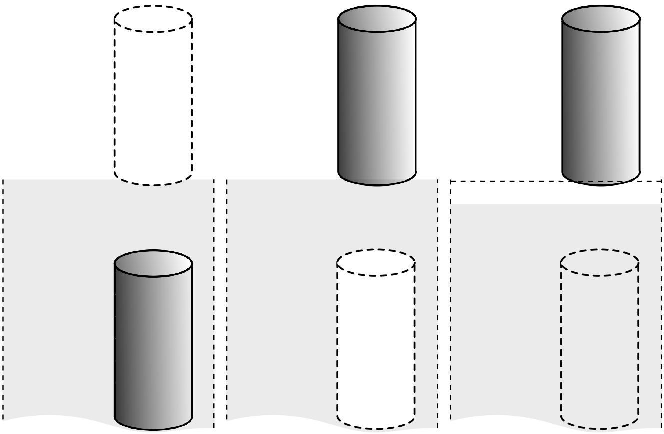
Řešení pomocí energií

Práce, kterou jeřáb vykoná, musí odpovídat celkové změně potenciální energie všech objektů, které se během zvedání sloupu pohybovaly.

Sloup se po vytáhnutí z rybníka zvedl o $H = 7\,\mathrm{m}$, takže změna (nárůst) jeho potenciální energie byla jednoduše $E_1 = mgH$. Sloup však není jediný objekt, který se během zvedání pohnul, neboť svoji polohu musela změnit i voda, aby v rybníku vyplnila „díru“, kterou tam zanechal sloup.

Přirozeně, „díru“ po sloupu začala ještě během vytahování zaplňovat voda z jeho blízkého okolí. Blízké okolí pak začala zaplňovat voda ze vzdálenějšího okolí, tu pak voda ze vzdálenějšího okolí a tak dále. Rybník ale není nekonečný, takže chybějící objem vody se musí někde projevit. Jedinou možností, odkud tuto vodu sebrat, je vodní hladina – jednoduše, po vytáhnutí z rybníka hladina rybníka nepatrně poklesne a všechny „díry“ se tak zaplní.

V konečném důsledku tedy „zmizí“ tenká vrstva vody z hladiny rybníka a zaplní se díra po sloupu. Jinde voda svoji polohu (a ani polohovou energii) nezmění. Z pohledu energií si tak můžeme zcela správně představit, že po sloupu skutečně zůstala v rybníce díra, kterou pak najednou vyplnila tenká vrstva vody z hladiny rybníka, viz obrázek 1.



Obr. 1: Tři myšlenkové etapy zvedání sloupu.

Potenciální energie této vody s objemem V a hmotností $M = \varrho_\mathrm{v} V$ se během našeho myšlenkového teleportu snížila o $E_2 = Mg\Delta t$, kde Δt je změna výšky těžiště vody. Na začátku byla všechna voda ve stejné výšce na hladině rybníka (tzn. ve výšce H nade dnem), po teleportu vytvořila na dně rybníka válec s těžištěm ve středu, tzn. ve výšce $h/2$ nade dnem. Δt je tedy rovno $H - h/2$ a celková vykonaná práce je tedy

$$W = E_1 - E_2 = mgH - Mg\Delta t = mgH - \varrho_\mathrm{v} Vg\,(H - h/2) = 4\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 7\,\mathrm{m}$$
$$- 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot \pi\,(0{,}5\,\mathrm{m})^2 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot (7\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m}) = 182\,\mathrm{kJ}\,.$$

Oba postupy jsou fyzikálně správné, není tedy divu, že jsme oběma přístupy dospěli ke správnému výsledku, a to, že jeřáb vykonal práci přibližně 182 kJ.

David Němec
david@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.