

Úloha III.2 . . . Ludolfovo číslo

6 bodů; průměr 4,59; řešilo 46 studentů

Číslo π je jedním z nejznámějších čísel matematiky. Udává poměr obvodu kruhu ku jeho průměru. Martin si našel, že v antice se na jeho přibližný výpočet používal poměr obvodu pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice ku průměru kružnice.

Nejprve vypočítejte tento poměr pro čtyřúhelník a šestiúhelník, pak například pomocí Excelu nebo jiného kalkulátoru najděte takový n -úhelník s nejmenším n , že jeho poměr je alespoň 3,14, což je hodnota již velmi blízká π .

Na začátek bychom měli říci, že pro naši úlohu jsou velmi důležité správné ilustrace a obrázky, které vycházejí ze zadání. Výpočetně už tak složitá není. Podstatné je také správně pochopit zadání, a to tak, že je úkolem vypočítat poměr obvodu n -úhelníku ku průměru kružnice, která je mu opsaná.

Jako první máme vypočítat tento poměr pro pravidelný čtyřúhelník, kterým je klasický čtverec o straně a . Průměrem kružnice opsané je, jak je vidět z ilustrace, úhlopříčka čtverce. Průměr kružnice d vypočítáme za použití Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Obvod čtyřúhelníku se rovná součtu všech stran $o = 4a$. Poměr obvodu čtverce a průměru kružnice je

$$\frac{o}{d} = \frac{4a}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \doteq 2,828.$$

V případě šestiúhelníku je výpočet jednodušší. Stačí se jen zamyslet. Šestiúhelník můžeme rozdělit na šest trojúhelníčků, jak je vidět na obrázku. Protože se jedná o šestiúhelník, jsou trojúhelníčky rovnostranné (vyplývá to z velikostí vnitřních úhlů). Průměr kružnice je tedy dvojnásobek jedné strany

$$d = 2a.$$

Obvod je opět součtem všech stran $o = 6a$. Poměr obvodu šestiúhelníku a průměru kružnice je

$$\frac{o}{d} = \frac{6a}{2a} = 3.$$

Tímto způsobem bychom dále mohli pokračovat k sedmiúhelníku, osmiúhelníku atd. Je to ale velmi zdlouhavé, a proto je jednodušší si odvodit vzorec pro výpočet průměru kružnice opsané.

Načrtneme si libovolný trojúhelník a popíšeme si ho jako na obrázku. Za pomoci goniometrické funkce sinus můžeme vyjádřit poloměr kružnice opsané. Pro sinus platí, že je poměrem protilehlé odvěsny a přepony. Zapišeme to jako

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Úhel α v závislosti na počtu úhlů n můžeme vyjádřit jako

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}.$$

Dosadíme

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180}{n}}.$$

Máme vzorec pro poloměr, ale my chceme průměr. Rovnici vynásobíme dvěma. Protože $a = 1$ (tuto veličinu lze volit libovolně), dosadíme ji do rovnice:

$$d = \frac{1}{\sin \frac{180}{n}}.$$

Získali jsme obecnou rovnici pro výpočet průměru kružnice, podobný vzorec naleznete také v tabulkách.

Nyní přejdeme k části s Excelem. My jsme si do prvního sloupce A zapsali počet úhlů, do sloupce B obvod (protože platí, že počet úhlů je stejný jako počet stran, je obvod totožný s počtem úhlů), do sloupce C vzorec pro výpočet průměru kružnice a do sloupce D poměr obvodu a průměru. Zastavili bychom se pouze u vzorce pro průměr kružnice. Excel totiž předpokládá, že číselná hodnota uvnitř funkce sin je v radiánech. Je proto třeba úhel převést. Nejjednodušeji to lze udělat použitím funkce RADIANS(), která číslo uvnitř funkce automaticky převede na radiány.

Tab. 1: Obsah prvních pěti řádek tabulky v Excelu.

	A	B	C	D
1	Počet úhlů	Obvod	Průměr kružnice	Poměr obvod/průměr
2	3	3	$= 1/\text{SIN} \frac{\text{RADIANS}(180)}{A2}$	$= B2/C2$
3	4	4	$= 1/\text{SIN} \frac{\text{RADIANS}(180)}{A3}$	$= B3/C3$
4	5	5	$= 1/\text{SIN} \frac{\text{RADIANS}(180)}{A4}$	$= B4/C4$
5	6	6	$= 1/\text{SIN} \frac{\text{RADIANS}(180)}{A5}$	$= B5/C5$

Tab. 2: Reálná čísla

	A	B	C	D
1	Počet úhlů	Obvod	Průměr kružnice	Poměr obvod/průměr
2	3	3	1,1547	2,5981
3	4	4	1,4142	2,8284
4	5	5	1,7013	2,9389
5	6	6	2,0000	3,0000

Tab. 3: Řádky 55-57

	A	B	C	D
55	56	56	17,8347	3,1399
56	57	57	18,1529	3,1400
57	58	58	18,4710	3,1401

Postupně si můžeme všimnout, že hodnoty čtvrtého sloupce se blíží hodnotě 3,14. Pokud sloupečky dostatečně natáhneme uvidíme následující:

Při počtu úhlů 57 je hodnota poměru obvodu a průměru kružnice dostatečně blízká číslu 3,14.

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.