Výfučtení: O kruzích, kružnicích, stupních a radiánech

V tomto textu se nejprve pokusíme objasnit, jak lidé v průběhu času přemýšleli o kružnicích a čísle π (pí). Poté se budeme věnovat historii a zavedení jednotek úhlů, což bude část více k zamyšlení. Znalost radiánů, které si odvodíme, se vám bude hodit až při dalším studiu fyziky, nicméně neuškodí se alespoň dozvědět, co ta zvláštní kontrolka `RAD` na vaší kalkulačce dělá, když svítí.

Počátky matematiky

Starověcí řečtí matematici, jako například Archimédes, při vymýšlení matematických pravidel a pouček nepoužívali čísla ani číselné soustavy, jako my používáme dnes. Všechny výpočty, kterými se snažili odhalit nová pravidla, prováděli pomocí geometrie a úseček. Takový matematik si sedl, nakreslil si čáru a řekl si, že její velikost je rovna jedné. Poté mohl pomocí pravítka vytvořit další čáru stejné velikosti nebo dvakrát větší čáru (tj. o velikosti dva) a to spojením dvou čar o jednotkové délce za sebe.

Prvočísla, tj. čísla mající právě dva dělitele – jedničku a sebe sama, byla například definována jako úsečky, které, budeme-li je skládat z úseček o téže délce, lze složit jen z úseček, které si Řek nakreslil jako první, tj. ty s „jednotkovou“ délkou. Například úsečku čtyřikrát delší než původní úsečku mohl Řek zkonstruovat pomocí dvou úseček dvakrát delších než původní, a proto číslo 4 není prvočíslo. Naopak sedmkrát delší úsečku mohl zkonstruovat jen spojením sedmi základních úseček za sebe, a proto je číslo 7 prvočíslo.

Řekové také zvládli tvořit trojúhelníky a mnohoúhelníky, dokonce brzy odvodili způsob, jak spočítat jejich obsah. Když však vytvořili kruh (kružítkem nebo jen dvěma klacíky spojenými provázkem), s výpočtem jeho obsahu a obvodu si dlouho nevěděli rady. Zkuste si sami představit, jak byste ho odvodili s prostředky, které měli staří Řekové!

Řekové na to šli tak, že se snažili kruh a kružnici zjednodušit na jiná tělesa, která již znali. Obvod rovnostranného trojúhelníku je rovný trojnásobku jeho strany, ale zároveň je menší než obvod kružnice trojúhelníku opsané. Obvod čtverce je čtyřnásobek jeho strany, ale zároveň je větší než obvod kružnice jemu vepsané. Z těchto poznatků tedy plyne, že obvod kružnice o je nějaká konstanta k, jejíž velikost leží mezi čísly 3 a 4, vynásobená průměrem kružnice d, tedy $o = kd$. Pokud využijeme, že průměr kružnice je roven dvojnásobku poloměru r, lze obvod kružnice také zapsat jako $o = 2kr$. Že ona konstanta k, kterou dneska nazýváme π, se nachází někde mezi čísly 3 a 4, už byl docela slušný odhad na to, že to bylo před více než 2000 lety, nemyslíte?

Archimédes údajně použil ještě detailnější a přesnější postup. Zjednodušil si kružnici na co největší n-úhelník. Takovýto n-úhelník opsaný kružnici[1] má větší obvod než kružnice, zatímco vepsaný n-úhelník má obvod vůči kružnici menší. 96-úhelník, který Archimédes použil, ho dovedl k výsledku, že π leží v intervalu hodnot od 3,1408 do 3,1429, což je výsledek přesnější, než dnes často používaná zaokrouhlená hodnota 3,14. Při výpočtu obsahu kruhu Archimédes zjistil, že

[1] Tzn. kružnice je tomuto n-úhelníku vepsaná.

jeho obsah S je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna je rovna obvodu kruhu a druhá se rovná poloměru kruhu, neboli

$$S = \frac{(2\pi r)\, r}{2} = \pi r^2\,.$$

Další zkoumání π a kruhů

Archimédova nejznámější věta „Neruš mé kruhy!“ dokazuje, jak moc byli řečtí matematici fascinováni kruhem. Zájem o kruh a o onu zvláštní konstantu π však neskončil v této době. Ludolf van Ceulen, německý matematik, po němž se někdy číslu π říká Ludolfovo číslo, strávil značnou část života přemýšlením o kruhu a s použitím stejné metody jako Archimédes spočítal hodnotu π s přesností na dvacet desetinných míst. Dnes již víme, že číslo π je tzv. iracionální číslo, což znamená, že má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj, tedy že nelze zapsat zlomkem. Číslo π tedy nikdy nebudeme znát celé. Avšak i navzdory tomu se v dnešní době stále počítají jeho nová a nová desetinná místa. Jejich znalost nepřináší žádný praktický užitek, protože výpočty s π s mnoha desetinnými místy budou jen zanedbatelně přesnější.

Ale i přesto lze nalézt nadšence, kteří hodnotu π neustále zpřesňují. Totiž i samotné hledání efektivnějších a rychlejších postupů na výpočet π přináší matematikům hodně nových poznatků.

Dnes známe π s přesností na 2 e15 desetinných míst a jen zaznamenání toho čísla by zabralo víc než 1 000 TB paměti. Číslo π je tak populární, že byl vymyšlen dokonce i den pí, který vychází na 14. března (neboli 3. 14. v anglosaském způsobu zápisu data).

Pro praktické výpočty úplně postačuje si zapamatovat přibližnou hodnotu π jako 3,14. Dostatečně přesné je i vyjádření zlomkem jako 22/7 (nebo trochu přesněji 355/113).

Další důvod popularity tohoto čísla je, že – protože je nekonečné a neopakující se – jsou v něm ukryty naprosto všechny možné číselné kombinace. Tedy, zakódujeme-li abecedu do dvojmístných čísel, můžeme v něm najít jakoukoliv knihu, která byla napsána, budeme-li hledat dostatečně dlouho.

Úhly a radiány

Další věc, která souvisí s kružnicemi, jsou úhly. Je očividné, že právě kruh svírá plný úhel, tedy maximální možnou hodnotu úhlu. Mohli bychom si tedy definovat jeho hodnotu jako jednotkový úhel, ale to by se těžko vyjadřovaly ostatní úhly. Vlastně bychom si mohli zvolit jakékoliv číslo a popsat pomocí tohoto čísla i zbylé, menší úhly. Proč se tedy používá jako jednotka úhlu stupeň a plný úhel má 360°?

Jeden z důvodů, proč byl plný úhel zaveden zrovna jako 360°, je jeho praktičnost. Číslo 360 je lehce dělitelné mnoha čísly, takže části plného úhlu se jednoduše vyjadřovaly v celočíselných stupních. Dříve se také používala šedesátková soustava, také proto, že si lidé mysleli, že rok má 360 dní. Pak 1° byla dráha, kterou opsalo Slunce za 1 den.

Kromě stupňů ale existuje i jiná, v mnohých směrech elegantnější úhlová stupnice, jejíž jednotkou jsou radiány. Jeden radián je definován jako úhel kruhu, jehož oblouk bude mít stejnou délku jako jeho poloměr. To je ekvivalentní s tvrzením, že plný úhel je 2π radiánů. Takto jednoduchý vztah je i důvodem, proč se tato jednotka používá. Na to, abychom spočítali délku kružnicového oblouku, stačí poloměr kružnice vynásobit daným úhlem v radiánech.

Radiány se značí značkou rad. Překvapivé ale je, že jednotka radián nemá ve fyzice žádné opodstatnění, a tak se jejich značení moc nepoužívá a jednoduše se vynechá. Proto, například když mluvíme o otáčivém pohybu, je jednotka úhlové rychlosti jednoduše s^{-1}. Ve skutečnosti je její jednotka $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Shrnutí

Již starověcí Řekové přišli na to, že obvod kruhu se spočítá jako $o = 2\pi r$ a jeho obsah jako $S = \pi r^2$. Číslo π ale neuměli přesně vyčíslit. Dnes ho již dokážeme vypočítat velmi přesně pomocí počítačů.

Pro popsání velikosti úhlu se používají dvě hlavní jednotky – stupně, kdy plný úhel má 360°, a radiány, kdy plný úhel má $2\pi\,\mathrm{rad}$. Stupně lze používat, ale ve fyzice se častěji používají radiány. Nebuďte tedy překvapeni, když někde uvidíte např. „funkce sinus je definována pro úhly $\pi/2$ do $3\pi/2$“, protože čísla $\pi/2$ a $3\pi/2$ jsou velikosti úhlů vyjádřené v radiánech.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.