Výfučtení: Geometrické útvary a zobrazení

V geometrii občas narazíme na to, že některé geometrické obrazce vykazují jistou symetrii. Popřípadě můžeme slyšet, že nějaké dva útvary jsou si *podobné*. V tomto Výfučtení budeme hovořit právě o geometrických operacích, které se symetriemi a podobnostmi úzce souvisí.

Základní geometrické útvary

Úvodem si připomeňme základní dvourozměrné geometrické útvary a jejich zajímavé vlastnosti.

Kružnice a kruhy

Víte, jaký je rozdíl mezi kruhem a kružnicí? Jednoduše řečeno, kruh je kružnicí ohraničen. Z toho vyplývá, že kružnice nemá obsah, ale jen obvod, kdežto kruh má jak obsah, tak i obvod. Pro obvod kruhu (resp. kružnice) a obsah kruhu o poloměru r platí

$$o = 2\pi r\,, \qquad S = \pi r^2\,.$$

Známe i význačné kružnice, které jsou *opsané* nebo *vepsané* nějakému obrazci (nejčastěji se setkáte s opisováním kružnice trojúhelníkům nebo čtyřúhelníkům). Vepsaná kružnice se dotýká obrazce zevnitř v jednom bodě každé jeho strany. Střed vepsané kružnice se nachází v průsečíku os vnitřních úhlů tohoto obrazce. Jako opsanou kružnici označujeme takovou, na níž leží *všechny* vrcholy obrazce. Existují tedy i obrazce, kterým kružnici opsat nelze (žádná kružnice splňující uvedenou podmínku neexistuje).

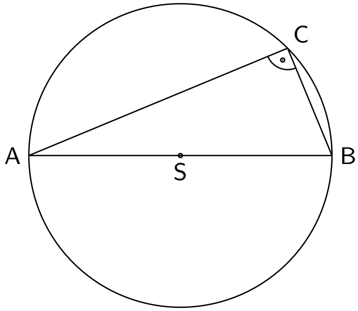
Platí tvrzení, že všem trojúhelníkům lze opsat kružnici. (Její střed leží v průsečíku os jeho stran.) Co se týká čtyřúhelníků, ne všem jde opsat nebo vepsat kružnice (zkuste si nějaký příklad třeba jen načrtnout).

Speciální opsané kružnici se říká *Thaletova kružnice*, podle řeckého filosofa a geometra Thaléta z Milétu. Označíme-li AB průměr kružnice, pak platí, že libovolná poloha bodu C na oblouku kružnice (mimo body A a B) vytvoří pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C (viz obrázek 1). Stejně tak platí, že opíšeme-li pravoúhlému trojúhelníku kružnici, bude přepona jejím průměrem. Střed Thaletovy kružnice pak splývá se středem přepony pravoúhlého trojúhelníku, kterému je opsaná.

Čtyřúhelníky

Čtyřúhelníky jsou útvary se čtyřmi vrcholy, přičemž součet jejich vnitřních úhlů je 360°. Dělit čtyřúhelníky se dá podle více kritérií. Pokud se bavíme o vztazích platících mezi jednotlivými stranami, případně úhlopříčkami čtyřúhelníku, dělíme je na rovnoběžníky, deltoidy a lichoběžníky. Můžeme se ale bavit o čtyřúhelnících i ve spojitosti s právě zmíněnými kružnicemi opsanými a vepsanými.

Čtyřúhelníkům, kterým kružnici opsat lze, se říká *tětivové*. Takovýto útvar pak splňuje, že součet dvou protějších vnitřních úhlů je roven součtu zbylých dvou. (Díky zmíněnému celkovému součtu vnitřních úhlů víme, že součet dvou protějších vnitřních úhlů má velikost 180°.)



Obr. 1: Thaletova kružnice

Čtyřúhelníkům, kterým jde kružnice vepsat, říkáme tečnové. U nich platí, že součet délek jeho protějších stran je stejný jako součet zbylých protějších stran.[1]

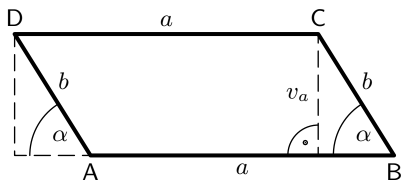
Rovnoběžníky mají čtyři strany tvořeny dvěma dvojicemi navzájem rovnoběžných stran. Mezi rovnoběžníky patří pravoúhelníky (čtverce, obdélníky) a kosoúhelníky (kosočtverce a kosodélníky). Obecně platí, že úhly rovnoběžníků nemusejí být pravé, avšak protilehlé úhly mají vždy stejnou velikost.

Každý rovnoběžník má čtyři výšky. Výška je úsečka kolmá na stranu, na kterou je vedena z nějakého vrcholu obrazce, a její délka v tomto případě odpovídá kolmé vzdálenosti protilehlých stran. Zavedení výšek jakožto kolmých vzdáleností se nám velice hodí třeba při výpočtu obsahu rovnoběžníku, viz níže.

Úhlopříčka je úsečka spojující dva protilehlé vrcholy – každý rovnoběžník má tedy dvě uhlopříčky, které se navzájem díky rovnoběžnosti půlí. Navíc v kosočtverci a čtverci jsou úhlopříčky na sebe kolmé. Dále pak čtverec a obdélník mají obě úhlopříčky stejně dlouhé.

Obsah rovnoběžníku vypočítáme tak, že vynásobíme délku jedné strany s výškou na ni kolmou, viz obrázek 2:

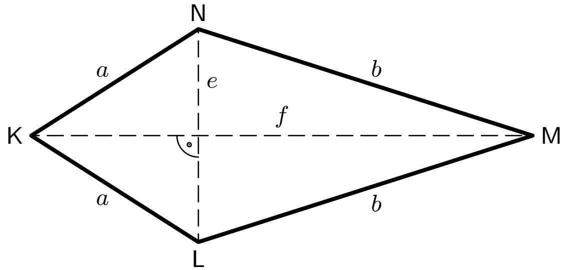
$$S = av_a = bv_b = cv_c = dv_d\,.$$



Obr. 2: Na obrázku vidíme, že pokud bychom si „přemístili“ trojúhelník s úhlem α vpravo do míst vyznačených čárkovaně, z kosého útvaru se stane pravoúhlý se stranami o velikostech a a v_a. Tím pádem můžeme počítat jeho obsah jako obsah pravoúhelníku, tedy $S = av_a$.

[1] Tzv. *dvojstředový čtyřúhelník* je takový, kterému lze zároveň vepsat i opsat kružnice, což není zcela běžná vlastnost. Nejjednodušším příkladem dvojstředového čtyřúhelníku je čtverec.

Další skupina čtyřúhelníků jsou různoběžníky, mezi které patří deltoidy. Deltoid je osově symetrický podle *právě* jedné z úhlopříček čtyřúhelníku (viz obrázek 3).[2] Pro nás to zatím znamená, že má dvě nestejně dlouhé na sebe kolmé úhlopříčky, z nichž jedná půlí druhou a ne naopak (jinak by se jednalo o kosodélník, případně kosočtverec).



Obr. 3: Obecný deltoid

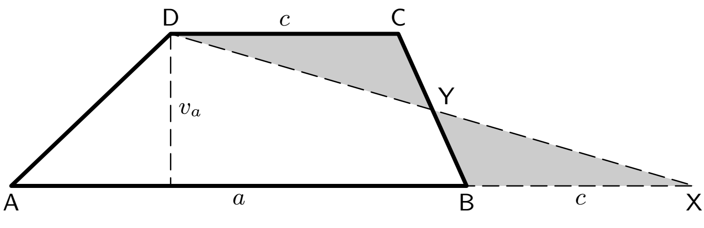
Obvod deltoidu určíme jednoduše jako $o = 2\,(a + b)$. K odvození obsahu si pomůžeme stejným obrázkem. V něm vidíme, že úhlopříčka f půlí celý deltoid na dva shodné trojúhelníky, s výškami rovnými $e/2$. Sečteme-li obsahy těchto trojúhelníků, spočítáme i obsah deltoidu:

$$S = 2\frac{f\frac{e}{2}}{2} = \frac{ef}{2}\,.$$

Ve výpočtu jsme využili, že pro obsah trojúhelníku platí $S = av_a/2$, kde a je délka jedné ze stran a v_a je výška na tuto stranu kolmá.

Lichoběžník je útvar, jenž má právě dvě protilehlé strany rovnoběžné. Ty se nazývají základny a nejsou stejně velké (pak by se jednalo o rovnoběžník). Zbylým dvěma stranám říkáme ramena. Má-li lichoběžník ramena stejně dlouhá, říkáme mu *rovnoramenný* lichoběžník. Úhly, které svírá spodní základna s rameny, jsou si rovny, stejně tak i úhly u horní základny. Další ze specifických lichoběžníků je *pravoúhlý*, kdy právě jedno z ramen je kolmé na základny.

V lichoběžníku často uvažujeme jen jednu výšku v sloužící k popisu vlastností daného lichoběžníku, viz obrázek 4.



Obr. 4: Lichoběžník ABCD, na němž jsme odvodili vzorec pro jeho obsah

[2] Co to je středová symetrie se dozvíte dále v textu.

Obsah lichoběžníka vypočteme podle vzorce

$$S = \frac{(a+c)\,v}{2}\,.$$

Proč je tomu tak, si ukážeme pomocí obrázku 4, kde je nakreslený rovnoběžník ABCD. Když úsečku $\mathsf{AB} = a$ prodloužíme od bodu B o délku úsečky $\mathsf{CD} = c$ doprava, dostaneme bod označený X. Pokud spojíme tento bod s bodem D, vzniknou nám dva shodné trojúhelníky CDY a BXY. Poněvadž shodné trojúhelníky mají stejný obsah, platí, že obsah lichoběžníku ABCD je stejný jako obsah trojúhelníku AXD. Tento trojúhelník má výšku v shodnou s výškou lichoběžníka a stranu, na níž je tato výška kolmá, dlouhou $a + c$. Proto platí, že obsah trojúhelníku ADX a tudíž i obsah lichoběžníku je rovný $S = (a + c)\,v/2$.

Trojúhelníky

Na závěr si řekneme něco i o trojúhelnících. Obecně je trojúhelník útvar se třemi vrcholy a třemi vnitřními úhly, které mají dohromady 180°. Každý trojúhelník má tři výšky, které se protínají v jednom společném bodě zvaném orthocentrum, a tři těžnice (úsečky spojující vrcholy se středy protilehlých stran), které se spojují v tzv. těžišti. Uveďme si speciální trojúhelníky a některé základní vlastnosti, které v nich platí:

- V *rovnostranném* trojúhelníku jsou těžnice shodné s výškami.
- V *rovnoramenném* trojúhelníku je výška vedená na základnu shodná s odpovídající těžnicí.
- V *pravoúhlém* trojúhelníku výšky vedené na odvěsny splývají s odpovídajícími stranami trojúhelníka (nakreslete si obrázek).

Pravoúhlý trojúhelník má mnoho dalších zajímavých vlastností. Skrývají se v něm tzv. goniometrické funkce,[3] Thaletova kružnice a Pythagorova věta, jejíž slovní znění je: „obsah čtverce sestrojeného nad přeponou se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami“. Matematické vyjádření je mnohem kratší. Platí

$$c^2 = a^2 + b^2\,,$$

kde a a b jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníka a c je jeho přepona.

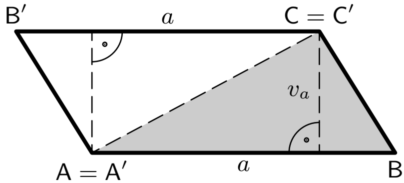
Pokud přiložíme dva shodné trojúhelníky a natočíme je k sobě tak, aby se dotýkaly podél nejdelší strany (nebo jedné z nejdelších stran, viz obrázek 5), vznikne nám rovnoběžník se stranami a a b a výškou v_a. Jelikož pro obsah rovnoběžníku platí $S = av_a$, obsah trojúhelníku bude poloviční, tzn.

$$S = \frac{av_a}{2}\,.$$

Shodná zobrazení

Pod pojmem zobrazení v geometrii myslíme operaci, kdy vezmeme předmět (např. nějaký geometrický útvar jako je bod, úsečka, trojúhelník atd.), který zobrazíme podle nějakého pravidla na jeho obraz. Shodná zobrazení jsou taková, jejichž pravidlo nemění úhly ani vzdálenosti, tzn. obraz a vzor jsou z tohoto pohledu shodné geometrické útvary. Mezi shodná zobrazení patří posunutí, osová a středová souměrnost.

[3] O goniometrických funkcích si můžete přečíst ve Výfučtení 4. série 2. ročníku: `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni`.



Obr. 5: Dva trojúhelníky tvořící rovnoběžník

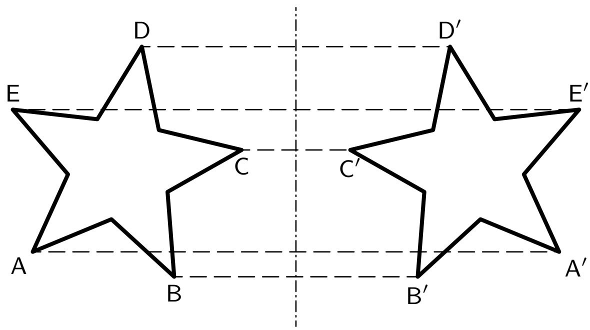
Posunutí

Posunutí je ze shodných zobrazení nejjednodušší. Značíme ho $T(\vec{v})$: $\mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}'$, což znamená, že jsme pouze přenesli daný bod A o danou vzdálenost daným směrem (podle vektoru $\vec{v}$[4]). Třeba čtverec ABCD se zobrazí na A′B′C′D′, tedy pro každý význačný bod čtverce (jeho vrchol) provedeme posunutí na jeho čárkovanou variantu a následně čárkované vrcholy spojíme. Tuto konvenci při konstrukci obrazu pomocí význačných bodů dodržujeme i níže.

Osová souměrnost

Osová souměrnost funguje jako zrcadlo. Máme-li předmět, který chceme zobrazit osovou souměrností podle dané osy, postupujeme tak, že z každého bodu předmětu (u geometrických obrazců stačí z význačných bodů, vrcholů) vedeme kolmici k ose souměrnosti. Této kolmici říkejme třeba přímka k. Obraz daného bodu (vrcholu) leží na přímce k, na druhé straně od osy souměrnosti, než kde je předmět, a ve stejné vzdálenosti od osy souměrnosti jako daný bod.

Tento obraz je vůči předmětu stranově převrácený, ale velikostně naprosto shodný. To znamená, že stejně velké jsou nejen příslušné strany, ale i úhly, výšky, těžnice, …(Což je, jak bylo zmíněno, obecná vlastnost *shodného* zobrazení.) Na obrázku 6 je podle osové souměrnosti zobrazena hvězda.

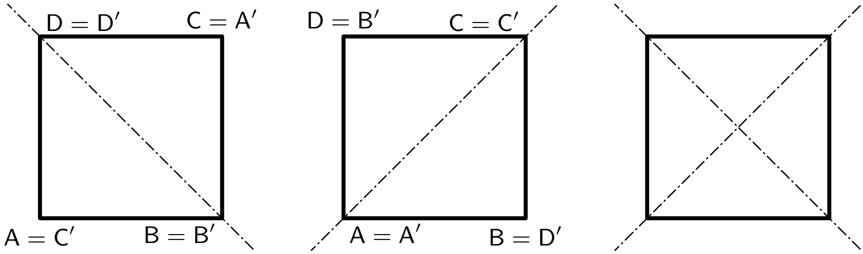


Obr. 6: Hvězda zobrazená v osové souměrnosti

[4]Použití vektoru je jen záležitost značení posunutí, které uvádíme pro úplnost a není třeba nad tím v tuto chvíli hlouběji uvažovat. Důležité je jen, že posunujeme o nějakou vzdálenost nějakým směrem. Pokud vás však zajímá něco více o vektorech, můžete se o nich dočíst v našem Výfučtení ze 2. série 2. ročníku na adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r2/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf`.

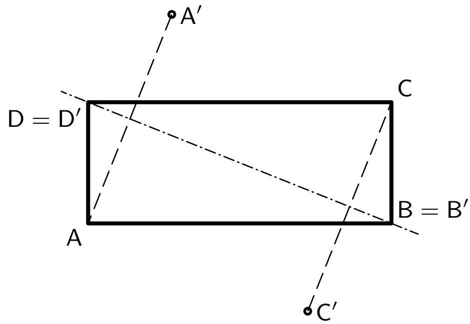
Matematicky toto zobrazení zapisujeme jako $O(o) : \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}'$ a čteme ho tak, že v osové souměrnosti podle osy o byl zobrazen bod A a vznikl jeho obraz bod A′.

Osově souměrný je potom takový obrazec, pro který existuje alespoň jedna osa souměrnosti procházející obrazcem, podle níž se daný obrazec zobrazí sám na sebe. Například čtverec je osově souměrný podle čtyř různých os, viz obrázek 7. Vidíme tedy, že u čtverce díky tomu, že má uhlopříčky stejně dlouhé a na sebe kolmé, splývají jeho dvě uhlopříčky s dvěma osami souměrnosti.



Obr. 7: Čtverec s vyznačenými osami souměrnosti, které splývají s uhlopříčkami a jsou na sebe kolmé

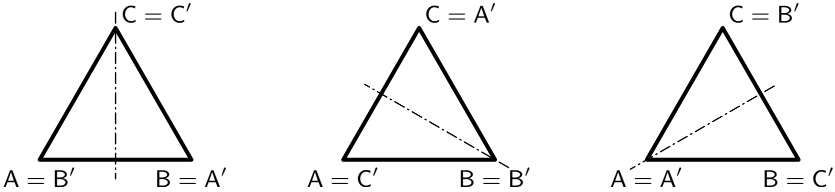
V obdélníku podobné splynutí os souměrnosti a uhlopříček nefunguje, protože jsme si řekli, že obraz leží na kolmici k ose souměrnosti, avšak uhlopříčky obdélníků nejsou obecně na sebe kolmé. Nefunkčnost této souměrnosti ilustruje obrázek 8.



Obr. 8: Obdélník a jeho vrcholy zobrazené pomocí osové souměrnosti podle jedné z uhlopříček–vidíme, že obrazy vrcholů nesplývají s těmi původními. Obdélník tedy není osově souměrný podle uhlopříčky.

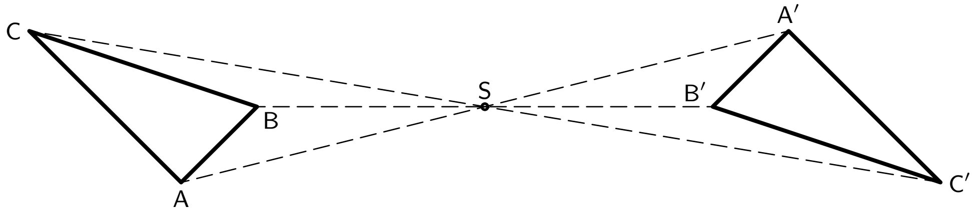
Středová souměrnost

Středová souměrnost je zobrazení pomocí jediného bodu, jemuž říkáme *střed souměrnosti*. Ze všech bodů (vrcholů) předmětu pak tímto bodem vedeme přímku. Obraz bodu nalezneme, podobně jako v případě osové symetrie, ve stejné vzdálenosti od středu souměrnosti jako je



Obr. 9: Osy souměrnosti nalezneme i v rovnostranném trojúhelníku

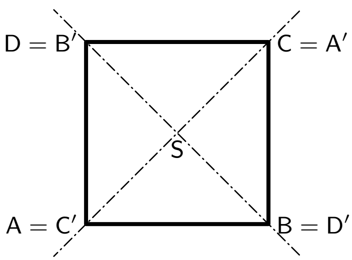
bod. I zde platí, že obraz je opět velikostně naprosto shodný s předmětem. Tentokrát je ale převrácený jak stranově, tak i výškově. Na obrázku 10 jsme takto zobrazili trojúhelník.



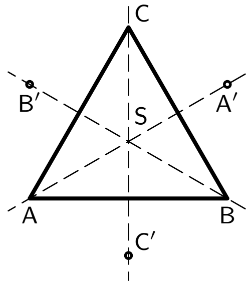
Obr. 10: Obecný trojúhelník zobrazený ve středové souměrnosti

Středovou souměrnost značíme $S(\mathsf{X}) : \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}'$, což znamená, že ve středové souměrnosti podle bodu X byl zobrazen bod A a vznikl tak jeho obraz A′.

Střed souměrnosti můžeme nalézt i v některých geometrických obrazcích. Pro existenci středové souměrnosti musí platit, že v daném útvaru existují dvě osy souměrnosti, které jsou na sebe kolmé. Střed souměrnosti je potom průsečík těchto os. Vzpomeňme si na čtverec, u něho jsme nalezli 4 osy souměrnosti, z nichž byly dvě a dvě na sebe kolmé a protínaly se ve středu čtverce – můžeme tedy říct, že čtverec je středově souměrný útvar se středem souměrnosti v průsečíku úhlopříček, viz obrázek 11.



Obr. 11: Čtverec a jeho obraz ve středové souměrnosti podle bodu S. Tento bod se nachází v průsečíku os souměrnosti.

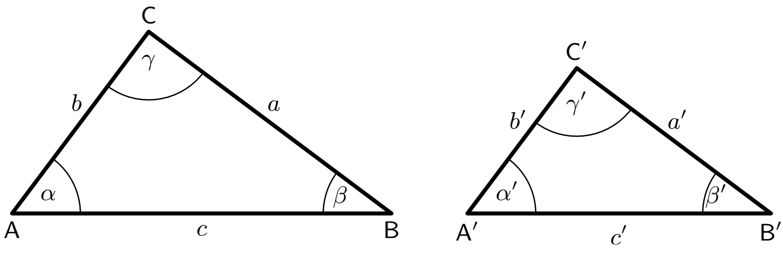


Obr. 12: U rovnostranného trojúhelníka jsme označili průsečík os souměrnosti S, avšak když podle něho zobrazíme ve středové souměrnosti vrcholy tohoto trojúhelníka, zjistíme, že nesplývají s původními. Rovnostranný trojúhelník tedy není středově souměrný, nemá střed souměrnosti.

Podobná zobrazení

Podobné útvary jsou v geometrii ty obrazce, které vypadají stejně, jen jsou různě zvětšené, či zmenšené. Matematicky tedy můžeme říci, že podobné útvary mají všechny odpovídající úhly stejně velké. Tato podmínka je splněna jen tehdy, když jsou všechny odpovídající si strany mezi zobrazovaným útvarem a jeho obrazem ve stejném poměru. Tzn. pokud například stranu a zmenšíme dvakrát, tak i všechny ostatní strany musí být zmenšeny dvakrát.

Pro čtverec platí, že má vždy všechny úhly pravé a všechny strany stejně dlouhé. Když tedy srovnáme dva různé čtverce, splňují obě podmínky podobnosti – můžeme tedy říct, že všechny čtverce jsou si mezi sebou navzájem podobné.



Obr. 13: Podobné trojúhelníky

K čemu nám může být podobnost dobrá? Pokud zjistíme, že nějaké dva obrazce jsou si podobné, často velmi snadno dokážeme dopočítat jejich strany nebo úhly. Velmi často se při řešení úloh setkáváme s podobností trojúhelníků. Aby bylo jednodušší zjistit, že nějaké trojúhelníky jsou si podobné, existují tzv. věty o jejich podobnosti. To jsou postačující podmínky na to, aby byly dva trojúhelníky podobné. Věty uvádíme shrnuty v tabulce 1 a značení stran a úhlů na obrázku 13. Za podobností je schován i fakt, že dokážeme-li nějakou vlastnost platící u jednoho útvaru, platí i v jeho libovolném obrazu (ať už shodném nebo podobném). To si můžeme představit na např. Pythagorově větě. Platí-li pro trojúhelník se stranami v poměru 3 : 4 : 5, Tabulka 1: Věty o podobnosti trojúhelníků

věta	formulace podmínky podobnosti	matematický zápis
sss	Příslušné strany jsou ve stejném poměru.	$a/a' = b/b' = c/c'$
uuu	Příslušné vnitřní úhly jsou shodné.	$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
sus	Dvě strany jsou ve stejném poměru a shodují se v úhlu jimi sevřeném.	$a/a' = b/b'$, $\gamma = \gamma'$
Ssu	Dvě příslušné strany jsou ve stejném poměru a shodují se v úhlu, který leží naproti větší z nich.	$b/b' = c/c'$, $\gamma = \gamma'$

pak platí pro libovolný trojúhelník se stranami v poměru $3x : 4x : 5x$, kde x je libovolné kladné reálné číslo.

Výše zmíněná pravidla nám mohou často pomoci i při řešení fyzikálních úloh, například u příkladů s nakloněnou rovinou se vyplatí hledat podobné trojúhelníky, které nám ulehčí rozklad sil do složek. Věříme, že vám znalost těchto pravidel pomůže a usnadní počítání.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.