# Výfučtení: Triky v řešení fyzikálních úkolů

## Úvod

Ve fyzice občas narazíme na problémy, jejichž řešení je mnohdy komplikované a zdlouhavé. Avšak v určitých případech se tyto složité problémy dají vyřešit velmi jednoduše a elegantně za předpokladu, že využijeme nějaký trik. Takovýchto triků existuje nepřeberné množství, z nichž některé si ukážeme v tomto Výfučtení.

## Obecné řešení

Velmi důležitá jsou tzv. *obecná řešení*, kde místo čísel využíváme pouze abstraktní označení veličin písmeny. Na rozdíl od řešení s konkrétními hodnotami nedochází k zaokrouhlovacím nepřesnostem a častokrát se na konci dojde i k výsledku ve zjednodušeném a elegantním tvaru. Obecné řešení je rovnice, která obsahuje na jedné straně neznámou veličinu a na druhé straně pouze známé veličiny nebo konstanty. Platí, že příklady se vždy snažíme vyřešit nejprve obecně (algebraicky), tudíž i s neznalostí číselných hodnot v zadání.

Nicméně, při obecném řešení postupujeme úplně stejně, jako kdyby v rovnicích byla čísla. Jediný rozdíl je v tom, že všechny matematické operace provádíme s písmeny. Takže z rovnic můžeme například vyjadřovat neznámé nebo je dosazovat do jiných rovnic. Jak již bylo zmíněno, největší výhodou tohoto postupu je přesnost. Další nespornou výhodou je fakt, že při obecném řešení často dojdete ke zjednodušení výsledného výrazu, něco se nám např. „pokrátí“ – v případě, že se jedná o nějakou konstantu (např. π), opět zvyšujeme přesnost výsledku. A v případě, že se jedná o proměnnou, můžeme zjistit, že jsme schopni úlohu vyřešit i přes to, že neznáme všechny veličiny, které se objevovaly v mezivýsledcích. Tyto výhody si ukážeme na příkladu.

### První příklad

*Vypočítejte s přesností na jedno desetinné místo, jakou hmotnost má dřevěná koule o hustotě* $\varrho = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, jestliže její povrch je* $S = 100\,\mathrm{dm^2}$*.*

Nejdříve počítejme postupně. Spočtěme poloměr koule

$$S = 4\pi r^2\,, \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{dm^2}}{4\cdot 3{,}14}} \doteq 2{,}8\,\mathrm{dm}\,.$$

Nyní určíme objem této koule

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot(2{,}8\,\mathrm{dm})^3 \doteq 91{,}9\,\mathrm{dm^3}$$

a nyní spočítáme její hmotnost

$$m = \varrho V = 91{,}9\,\mathrm{dm^3}\cdot 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \doteq 73{,}5\,\mathrm{kg}\,.$$

Naopak, budeme-li počítat obecně, postup bude následující:

$$m = \varrho V = \varrho \frac{4}{3}\pi r^3 = \varrho \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 ,$$

$$m = 800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \left(\sqrt{\frac{100\,\mathrm{dm^2}}{4 \cdot 3{,}14}}\right)^3 \doteq 75{,}2\,\mathrm{kg}\,.$$

Vidíme, že rozdíl mezi postupem s mezivýpočty a obecným řešením je až 1,7 kg. A věřte tomu, že mnohdy bývá rozdíl ještě větší.

## Rozměrová zkouška

Pokud řešíme příklady obecně, může se nám stát, že děláme mnoho poměrně komplikovaných úprav, kde hrozí, že při nich uděláme chybu. Proto je velmi výhodné si získané výsledky průběžně kontrolovat. Avšak kontrola každého kroku by byla velmi zdlouhavá. Na užitečnou a rychlou kontrolu, zda nemáme v postupu chybu, poslouží tzv. rozměrová zkouška. To není nic jiného, než že za všechny veličiny ve vzorci dosadíme jejich *základní jednotky SI* a pomocí úprav se snažíme zjistit, jakou jednotku má výsledná veličina, kterou se snažíme spočítat.

Pokud nám vyšla jednotka, kterou očekáváme (například u hmotnosti kilogramy), máme téměř vyhráno.[1] Jenom pozor, rozměrová zkouška nám pouze napoví, zda sedí jednotky. Pokud však někde v úpravách zapomeneme nějakou *bezrozměrnou* konstantu (např. $\pi$), tuto chybu neodhalíme. Jedno je ale jisté: pokud nám zkouška nedala očekávané jednotky (např. u hmotnosti nám vyšlo $\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$), rozhodně máme v úpravách chybu.

Rozměrovou zkoušku v praxi si ukážeme na dalším příkladu.

### Druhý příklad

*Paťo počítal přeměnu potenciální energie na kinetickou a došel k rovnici*

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m}}\,.$$

*Je jeho vzoreček správný?*

Provedeme-li rozměrovou analýzu Paťova vzorce, dostaneme

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{kg}}}\,,$$

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg{\cdot}m^2}}{\mathrm{kg{\cdot}s^2}}}\,,$$

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}}\,,$$

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Vidíme, že Paťův vzoreček je alespoň po rozměrové stránce správně.

[1] Musíme si dát pozor, že některé jednotky se kterými běžně počítáme, například newtony u síly, nejsou základní jednotky SI. Tedy pokud děláme rozměrovou zkoušku pro sílu a vyjde nám, že síla má jednotku $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$, neznamená to, že máme ve vzorci chybu, protože pro newton z definice platí $\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}} = \mathrm{N}$.

## *Zavádění vlastních veličin*

Dalším trikem, který si ukážeme, je zavádění „vlastních“ veličin. Občas se může stát, že při výpočtu potřebujeme počítat s nějakou veličinou, která reprezentuje něco, co neznáme, co není v zadání a co víc, občas se může stát, že jsme o takové veličině ani nikdy před tím neslyšeli! Nicméně pokud se tohoto nezalekneme a budeme i přesto s takovými veličinami počítat, zjistíme, že jednak se náš postup buď velmi zjednodušil, nebo že se nám povedlo vypočítat příklad, který bychom jinak vypočítat nezvládli. Možná to vypadá děsivě, ale není to nic těžkého. Až si zavádění vlastních veličin párkrát zkusíte, nebude vám to připadat vůbec zvláštní. Pojďme si tento trik opět ukázat na příkladech.

### *Třetí příklad*

*Auto jede čtvrtinu dráhy rychlostí $v_1$, po zbytek dráhy zpomalí a jede rychlostí $v_2$. Určete průměrnou rychlost automobilu.*

Nejprve si vzpomeneme, že průměrná rychlost $\overline{v}$ se vypočítá jako celková dráha $s$ uražená za celkový čas $t$. Ze zadání si tudíž musíme uvědomit, co je naše celková dráha a jak se vypočte čas. Celková dráha je součet drah prvního a druhého úseku. Můžeme tedy zapsat (a vyřešit) rovnici

$$s = s_1 + s_2 = \frac{1}{4}s + s_2\,, \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{3}{4}s\,.$$

Právě jsme si zavedli celkovou dráhu $s$, o které se jednak nehovoří v zadání, ba co víc, ani ji nedokážeme spočítat. Ničeho se nelekejme a počítejme s ní dál.

Jednotlivé časy na úsecích vypočteme z klasického vzorce pro rovnoměrný pohyb: čas je podíl ujeté dráhy a rychlosti:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{1}{4}s}{v_1} = \frac{s}{4v_1}\,,$$
$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{\frac{3}{4}s}{v_2} = \frac{3s}{4v_2}\,.$$

Celkový čas pohybu je pak jednoduše $t = t_1 + t_2$.
Nyní stačí jednotlivé neznámé dosadit do prvotní myšlenky $\overline{v} = s/t$:

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{4v_1} + \frac{3s}{4v_2}} = \frac{s}{s\left(\frac{1}{4v_1} + \frac{3}{4v_2}\right)} = \frac{4v_1v_2}{v_2 + 3v_1}\,.$$

Vidíme, že námi zavedenou dráhu $s$ nakonec nebylo ve výsledku potřeba znát, neboť se pokrátila. A takto to dopadá s většinou námi zavedených veličin: pomohou nám pohodlně provádět mezikroky a ve výsledku se pokrátí.[2]

[2] Tento princip se využíval i ve 3. sérii 4. ročníku v úloze číslo 4 – Sněhuláci. V našem archivu na webové adrese `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/r4/s3` můžete nalézt jak zadání, tak i řešení, takže to je skvělý příklad pro případné procvičení doma.

## Plocha pod grafem

Zaslechli jste někdy vaše starší spolužáky či sourozence mluvit o integrálech a zajímalo vás, co to je? Velmi zjednodušeně vás teď naučíme trik, který má s integrály mnoho společného, ale jeho provedení je velmi snadné. Integrály jsou jedny z nejpoužívanějších nástrojů ve fyzice. I přes to, že mohou být velmi složité, jejich základní princip je, že počítají „velikost plochy pod grafem“.

A přesně toho můžeme využít i my v případech, kdy bychom se k výsledku jiným způsobem dostávali jen velmi obtížně. Pokud počítáme nějakou veličinu jako součin dvou jiných veličin (například u práce se jedná o součin síly a dráhy), není problém spočítat výsledek, pokud jsou obě konstantní. Působíme-li silou $F = 5\,\mathrm{N}$ po dráze $s = 5\,\mathrm{m}$, vykonaná práce je $W = Fs = 5\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{J}$.

To jsme si neukázali nic nového, že? Ale co když se jedna z veličin bude měnit v závislosti na té druhé? Pokud známe jejich vzájemnou závislost, můžeme je zakreslit do grafu. Například je-li síla závislá na vzdálenosti, z tohoto grafu bude zřejmé, jak velká síla v daných bodech působila. Pak námi hledaný výsledek, který se spočte jako součin těchto dvou veličin, není nic jiného, než plocha pod křivkou v tomto grafu.

Tento trik je poněkud složitější na představivost, pojďme si ho tedy ukázat na příkladu.

### Čtvrtý příklad

*Auto jede rychlostí $v_0 = 72\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ až do okamžiku, kdy začne brzdit. Od tohoto okamžiku se rychlost auta snižuje rovnoměrně (odborně řečeno* lineárně klesá*) až do okamžiku, kdy auto zastaví. Pokud auto brzdilo $t = 10\,\mathrm{s}$, jakou dráhu urazilo od okamžiku, kdy řidič začal brzdit?*

Jelikož víme, že dráha se vypočítá jako $s = vt$ a že rychlost auta se zde mění v čase, nakreslíme si graf rychlosti v závislosti na čase. Na svislou osu budeme vynášet rychlost a na vodorovnou osu čas. Ale pozor na jednotky – hodnoty je potřeba vynášet v základních jednotkách SI!

Nyní již můžeme spočítat dráhu, kterou auto urazilo jako velikost plochy, která je pod grafem. Tato plocha je vlastně pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $v_0$ a $t$, takže pro jeho obsah můžeme napsat:

$$s = \frac{v_0 t}{2} = \frac{20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 10\,\mathrm{s}}{2} = 100\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme tedy, že auto po dobu brzdění urazilo dráhu $s = 100\,\mathrm{m}$.[3]

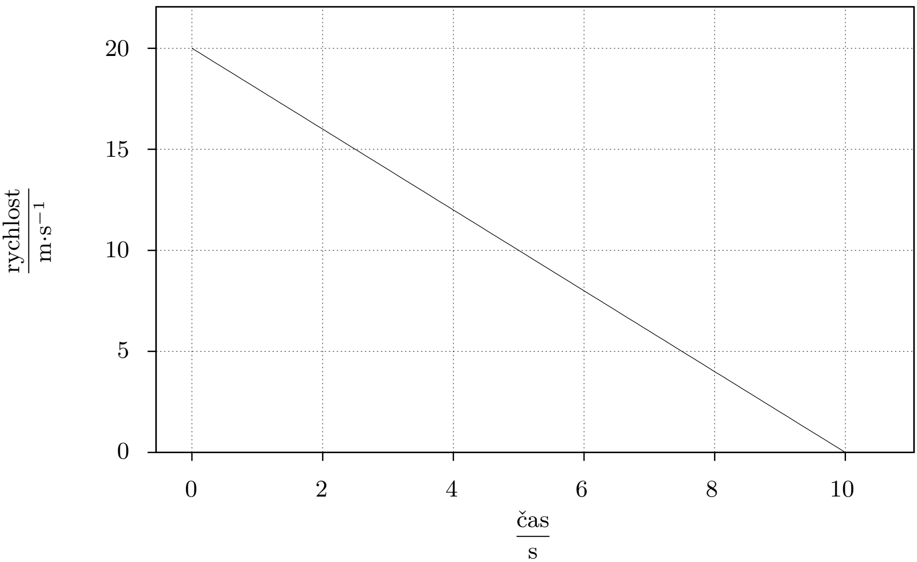
## Závěr

V tomto Výfučtení jsme si ukázali několik základních velmi užitečných triků, které lze využít při řešení fyzikálních problémů. Pevně věříme, že vám všechny tyto triky usnadní řešení spousty úloh. Čím víc se budete fyzice věnovat, tím více podobných triků poznáte a fyzika pro vás už bude jen snazší a snazší. Mnoho zdaru při řešení!

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



[3]Pokud již znáte zrychlení, velmi jednoduše si můžete ověřit, že vzoreček, ke kterému jsme došli z obsahu pod křivkou v grafu, je stejný, jako když na tuto úlohu půjdeme přes zrychlení.




Obr. 1: Závislost rychlosti auta na čase