Úloha IV.C ... Stavebnice

7 bodů; (chybí statistiky)

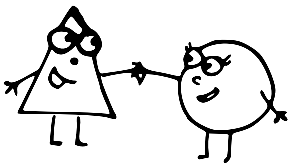
Radka zahájila na půdě úklid, při kterém našla starou stavebnici. Zjistila, že dílky stavebnice jsou různé geometrické útvary. Nejvíce tam bylo trojúhelníků se stranami dlouhými 3 cm, 4 cm a 5 cm.

(a) *Kolik těchto trojúhelníkových dílů se vejde na čtvercový plán o rozměrech* 24 cm × 24 cm *tak, aby se trojúhelníky nepřekrývaly?*

(b) *Radka našla i trojúhelníky s dvojnásobnými rozměry. Kolikrát méně těchto větších útvarů se jí povede uložit na stejně velký plán?*

(c) *Protože kousků v Radčině stavebnici bylo málo, chtěla si z papíru vyrobit další hezké útvary. Pod hezkým útvarem si Radka představuje středově a zároveň osově symetrický útvar. Navrhněte alespoň tři útvary, které splňují tyto podmínky symetrie, a nakreslete osu i střed jejich souměrnosti.*

(d) *Nakonec Radka prozkoumala všechny části stavebnice a našla také rovnoramenný lichoběžník, jehož strany vyjádřeny v centimetrech jsou celá čísla a jehož obsah je* $36\,\mathrm{cm}^2$. *Jaké mohou být délky stran Radčina lichoběžníku?*



(a) Protože pro délky stran platí $(5\,\mathrm{cm})^2 = (3\,\mathrm{cm})^2 + (4\,\mathrm{cm})^2$ (Pythagorova věta), trojúhelníky Radčiny stavebnice jsou pravoúhlé. Jeden trojúhelník má tak obsah rovný polovině součinu odvěsen, tj.

$$S_\mathrm{t} = \frac{3\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm}}{2} = 6\,\mathrm{cm}^2 \,.$$

Obsah čtvercového plánu je $S_\mathrm{p} = 24\,\mathrm{cm} \cdot 24\,\mathrm{cm} = 576\,\mathrm{cm}^2$. Vydělíme-li obsah plánku obsahem jednoho trojúhelníka, dostáváme $S_\mathrm{p}/S_\mathrm{t} = 576\,\mathrm{cm}^2/6\,\mathrm{cm}^2 = 96$. Celé číslo ale ještě *neznamená*, že se na plánek i tolik trojúhelníků vejde. Výsledek nám pouze říká, kolik trojúhelníků se na plánek vejde, pokryjí-li trojúhelníky beze zbytku celý plánek.

Jednoduchý postup, jak zjistit, zda-li je toto rozmístění možné, spočívá v tom, že trojúhelníky spárujeme do dvojic. Dva trojúhelníky s dotýkající se přeponou totiž vytvoří obdélník se stranami 3 cm a 4 cm, které jednoduše umíme ukládat těsně vedle sebe. S pomocí obrázku anebo s poznatkem, že délka strany plánku je dělitelná oběma rozměry obdélníku zjistíme, že na plánek se vejde přesně $8 \cdot 6 = 48$ obdélníků, tzn. $2 \cdot 48 = 96$ trojúhelníků.

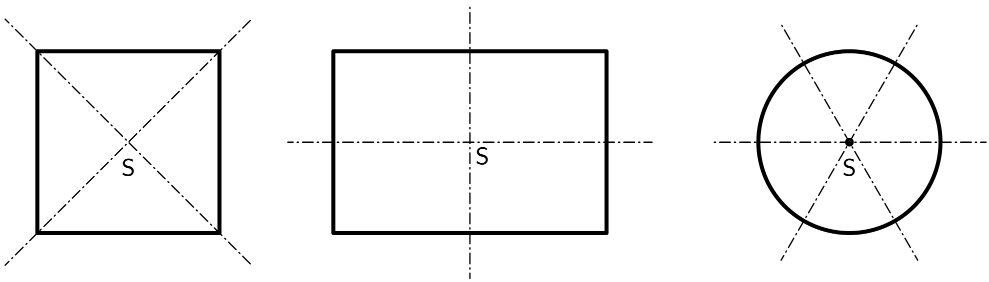
(b) Z pravidel podobnosti víme, že odvěsny větších trojúhelníků jsou dvakrát tak velké jako délky odvěsen původních trojúhelníků. Spojíme-li dva trojúhelníky podobně jako v předchozím bodě, vytvoří obdélník, jehož strany budou dvakrát tak velké, než v předchozím bodě. Nově vytvořených obdélníků se na plánek tedy nevejde 8×6, nýbrž 4×3, tedy celkem $4 \cdot 3 = 12$.

Na plánek se tedy vejde

$$k = \frac{96}{2 \cdot 12} = \frac{96}{24} = 4$$

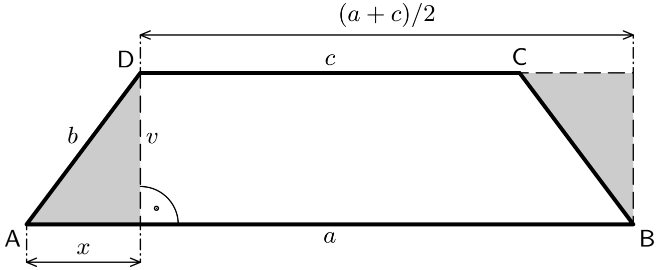
krát méně větších trojúhelníků. Tento výsledek odpovídá i faktu, že větší trojúhelník má čtyřikrát větší obsah, než trojúhelník s polovičními délkami stran.

(c) Ve Výfučtení si můžeme přečíst, že středovou symetrii mají takové útvary, jež mají dvě na sebe kolmé osy souměrnosti.
Dříve, než popustíme uzdu fantazii, zkusíme takové útvary najít mezi útvary z Výfučtení. Tak řečeno „zdarma“ zde nacházíme osově i středově souměrný čtverec. Ten má dvě osy souměrnosti procházející jeho vrcholy. Střed souměrnosti se nachází v jejich průsečíku, viz obrázek 1.
Další, velmi podobný útvar, je obdélník. Na rozdíl od textu Výfučtení, kde jsme ukázali, že obdélník není osově souměrný podle osy splývající s jednou z úhlopříček, si nyní všimneme os procházejících středy jeho stran. Tyto osy jsou osy souměrnosti (vyzkoušejte si), ale navíc jsou na sebe kolmé. To znamená, že obdélník je rovněž středově souměrný.
Poslední útvar, který splňuje podmínku ze zadání, je například kružnice. Ta vyniká v tom, že je osově souměrná podle „libovolné“ osy procházející středem kružnice. Není proto divu, že z této množiny os lze vybrat dvě osy, které jsou na sebe kolmé. Ty se samozřejmě protínají ve středu kružnice, což je tedy zároveň i střed její bodové souměrnosti.



Obr. 1: Středově symetrické útvary. Střed symetrie je vyznačen jako bod S.

(d) Rovnoramenný lichoběžník (viz obrázek 2) si můžeme představit jako obrazec složený z obdélníku (zde se stranami c a v) a ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků. Když jeden z trojúhelníků přesuneme (viz obrázek 2), dostáváme obdélník se stranami $(a + c)/2$ a v.



Obr. 2: Náčrt rovnoramenného lichoběžníku

Ze zadání víme, že všechny strany lichoběžníku a, b a c vyjádřeny v centimetrech jsou celá

čísla. Navíc, pro jeho obsah platí $36\,\mathrm{cm}^2 = (a+c)v/2$, takže pro jednoduchost můžeme očekávat, že i výška v bude vyjádřena v centimetrech jako celé číslo.
V obrázku vidíme i to, že výška v je (celočíselnou) odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka s celočíselnou přeponou b. Z Výfučtení víme, že celočíselnost speciálně všech stran pravoúhlého trojúhelníku je splněna třeba pro pythagorejské trojúhelníky. Jedním z nich je trojúhelník se stranami dlouhými $3\,\mathrm{cm}$, $4\,\mathrm{cm}$ a $5\,\mathrm{cm}$.
Zamysleme se, jestli takovýto trojúhelník je v námi hledaném lichoběžníku přípustný. Víme, že obsah tohoto trojúhelníka je $(3\,\mathrm{cm}\cdot 4\,\mathrm{cm})/2 = 6\,\mathrm{cm}^2$, tzn. i jeho dvojnásobek[1] má menší obsah než obsah celého lichoběžníku.
Uvažujme tedy $b = 5\,\mathrm{cm}$, $v = 3\,\mathrm{cm}$ (a logicky $x = 4\,\mathrm{cm}$). Z podmínky pro obsah máme

$$S = \frac{(a+c)v}{2} \quad \Rightarrow \quad a+c = \frac{2S}{v} = \frac{2\cdot 36\,\mathrm{cm}^2}{3\,\mathrm{cm}} = 24\,\mathrm{cm}\,.$$

Navíc z obrázku 2 plyne $a = c + 2x$, takže dostáváme

$$24\,\mathrm{cm} = a + c = 2c + 2x \quad \Rightarrow \quad c = \frac{24\,\mathrm{cm} - 2x}{2} = \frac{24\,\mathrm{cm} - 2\cdot 4\,\mathrm{cm}}{2} = 8\,\mathrm{cm}\,,$$

a tedy $a = 8\,\mathrm{cm} + 2\cdot 4\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{cm}$. Hledaný lichoběžník má tedy rozměry $a = 16\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 8\,\mathrm{cm}$.
Toto ale není jediné řešení, které nám předpoklad o pythagorejském trojúhelníku poskytuje. Můžeme totiž ještě zvolit $b = 5\,\mathrm{cm}$, $v = 4\,\mathrm{cm}$ a $x = 3\,\mathrm{cm}$. Stejným postupem tedy dostaneme řešení $a = 12\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 6\,\mathrm{cm}$.
Toto sice nejsou prokazatelně všechna řešení, ale zaručeně jsou to ta, která se dala najít nejsnáze. Je možné, že celočíselné a, b, c lze najít i pro neceločíselnou výšku v, respektive pro nepythagorejské pravoúhlé trojúhelníky.

Marek Božoň
`marek@vyfuk.mff.cuni.cz`

Patrik Švančara
`pato@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] V lichoběžníku jsou dva takovéto trojúhelníky.