

## Úloha IV.5 ... Přehrada

7 bodů; (chybí statistiky)

Denisa si v létě zajela na výlet k přehradě. Při její prohlídce si přečetla, že kruhová výpust přehrady se nachází v hloubce  $h = 50$  m pod úrovní hladiny vody v přehradě. Denisu překvapilo, jak bouřlivě voda z výpusti vytéká, a tak se začala zamýšlet nad tím, jestli lze výtokovou rychlost vody vypočítat.

Denisa přišla na to, že neustálé odtékání vody z přehrady při neměnné výšce hladiny si lze představit i tak, jakoby se voda přitékající na hladinu najednou „teleportovala“ do výpusti<sup>1</sup>.

- (a) Představte si, že se takto teleportuje objem vody  $V$ . Pomocí tohoto objemu, hustoty vody  $\rho$ , výšky  $h$  a tíhového zrychlení  $g$  vyjádřete změnu potenciální energie  $E_p$  tohoto objemu.
- (b) Denisa zjistila, že asi  $k = 63\%$  z této energie se promění na energii kinetickou. S pomocí tohoto poznatku nejdříve vyjádřete rychlost vody ve výpusti v pomoci veličin  $\rho$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $g$  a  $V$  (není potřeba použít všechny), a pak rychlost vody vypočítejte i číselně.
- (c) Řeka, která do přehrady přivádí veškerou vodu, má v létě průtok  $Q = 10 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Inženýři při stavbě přehrady ale počítali s tím, že na jaře, kdy řeka může mít průtok i  $50Q$ , bude mít výpust dostatečný průměr na to, aby voda pořád odtékala rychlostí  $v$ . Jaký je tento průměr?

- a) Polohová či potenciální energie se spočítá jako  $E_p = mhg$ , kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $h$  je jeho výška od nulové hladiny (tj. místo, od něhož měříme, v jaké výšce se těleso nachází) a  $g$  je tíhové zrychlení. My chceme vypočítat změnu této energie, když voda klesne o  $h = 50$  m. Hmotnost vody o daném objemu  $V$  zjistíme snadno pomocí vzorce pro hustotu  $\rho = m/V$ , kde hustota vody je přibližně  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ :

$$E_p = mhg = \rho Vhg.$$

- b) Víme, že ve výpusti se energie potenciální přeměňuje na energii kinetickou, ale nepřemění se všechna (jen  $k = 63\%$  z celkové  $E_p$ ). Takže platí

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = kE_p.$$

Ze vzorce si vyjádříme rychlost  $v$ :

$$\frac{1}{2}mv^2 = kmhg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2khg}.$$

V tomto vzorci jsou nám všechny veličiny na pravé straně známé, stačí jen dosadit v základních jednotkách:

$$v = \sqrt{2 \cdot 0,63 \cdot 50 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 25,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- c) Nyní je třeba trochu si pohrát se vzorcem pro výpočet průtoku  $Q = V/t$  ( $V$  je objem vody, který proteče ústí výpusti za čas  $t$ ). Objem  $V$  si představme jako plochu neboli obsah  $S$  výpusti násobenou délkou proudu  $l$ , který projde výpustí za čas  $t$ . Je tedy jasné, že délka  $l$

<sup>1</sup>Ve skutečnosti je dynamika odtékání vody komplikovanější, nicméně tento jednoduchý model nám bohatě postačí.

a čas  $t$  spolu souvisí a můžeme z nich vytvořit rychlost  $v$ , což je právě rychlost, kterou jsme počítali v předchozím bodě. Po postupných úpravách dostáváme

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{Sl}{t} = Sv.$$

Teď nám už jen zbývá rozepsat obsah  $v$  závislosti na průměru kruhové výpusti. Použijeme tedy vzorec pro plochu kruhu  $S = \pi r^2$ , kde  $r = d/2$  je poloměr výpusti, tedy polovina průměru  $d$ , který hledáme. Zbývá tyto úpravy zakomponovat do výsledného vzorce. Nesmíme rovněž zapomenout, že voda dosahuje rychlosti  $v$  při padesáti násobku běžného průtoku  $Q$ :

$$50Q = Sv = \pi r^2 v = \pi \frac{d^2}{4} v \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 50Q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \cdot 10 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{\pi \cdot 25,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}} \doteq 5 \text{ m}.$$

Výpust tedy musí mít průměr asi 5 m.

*Pavla Trembulaková*  
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.