Úloha III.5 ... Cesta na sever

7 bodů; průměr 3,43; řešilo 47 studentů

Petr se rozhodl o prázdninách dobýt severní pól. Základní tábor si založil na 89,9° s.š. a vydal se na lyžích rovnoměrným přímočarým pohybem na sever. Poté, co dosáhl severního pólu, pokračoval stále rovně, tedy na jih. Když byl od severního pólu stejně daleko jako na začátku, začala mu být zima, a tak vyrazil po rovnoběžce zpátky do základního tábora.
a) Jak daleko byl jeho tábor od severního pólu?
b) Za jak dlouho se dostal zpátky do tábora, když jel stálou rychlostí $v = 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$?
c) Nakreslete graf závislosti Petrovy vzdálenosti od severního pólu na čase.
d) Nakreslete také graf závislosti jeho rychlosti směrem na sever na čase.
Zemi považujte za přesnou kouli s poloměrem $R = 6\,378\,\mathrm{km}$.

a) Nejdříve si musíme uvědomit, co nám vlastně říká zadání: Petrův tábor je na 89,9° s.š. ve vzdálenosti s_1 od severního pólu. To znamená, že pomyslná spojnice tábora a středu Země svírá s rovníkem úhel právě 89,9°. Vzdálenost s_1 na povrchu Země tedy odpovídá délce oblouku kružnice o středovém úhlu $\alpha = 90^\circ - 89{,}9^\circ = 0{,}1^\circ$.
Hledanou vzdálenost pak můžeme vypočítat jako délku kružnicového oblouku (tj. části kružnice) odpovídající danému úhlu.
Platí, že kružnice vedená po povrchu Země a jejíž obvod je rovný $2\pi R$, odpovídá středovému úhlu o velikosti 360°. Pro oblouk se středovým úhlem 0,1° tedy na základě přímé úměry platí
$$\frac{s_1}{2\pi R} = \frac{0{,}1^\circ}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad s_1 = 2\pi R\frac{0{,}1^\circ}{360^\circ}\,.$$
Po dosazení dostáváme, že hledaná vzdálenost je
$$s_1 = 2\pi \cdot 6\,378\,\mathrm{km}\frac{0{,}1^\circ}{360^\circ} \doteq 11{,}13\,\mathrm{km}\,.$$
Všimněme si, že zde nemusíme počítat se základními jednotkami, poněvadž výsledek nám opět vyjde v kilometrech. Petrův tábor je tedy od severního pólu vzdálený přibližně 11,13 km.

b) Podle zadání jel Petr nejprve k pólu, pak pokračoval po stejně dlouhé dráze na jih a vracel se po rovnoběžce. Pohyb k pólu a na jih k rovnoběžce je jednoduché spočítat – je to dvojnásobná velikost hodnoty s_1. Pak nám už zbývá jen vypočítat délku cesty zpátky. Když si představíme její tvar, je to půlkruh s poloměrem r. Tento poloměr je zároveň odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je rovna R. Navíc, jeden z úhlů tohoto trojúhelníka je nám známý úhel α.
Na to, abychom ze známého úhlu α a přepony R spočetli protilehlou odvěsnu r, použijeme goniometrickou funkci sinus:
$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad r = R\sin\alpha = 6\,378\,\mathrm{km}\cdot\sin\left(0{,}1^\circ\right) \doteq 11{,}13\,\mathrm{km}\,.$$
Možná si říkáte, že je zvláštní, že nám s přesností na dvě desetinná místa (tzn. s přesností na 10 m) vyšlo $r = s_1$. Ve skutečnosti jsou přesnější hodnoty z kalkulačky rozdílné: $r = 11{,}131\,704\,\mathrm{km}$, $s_1 = 11{,}131\,709\,\mathrm{km}$. Tento nepatrný rozdíl je tak malý proto, že i úhel 0,1° je při takovýchto rozměrech skoro neznatelný.
Nyní vypočítáme délku Petrovy dráhy zpět do tábora s_2. Jak jsme již psali výše, jde o polovinu obvodu kružnice s poloměrem r:
$$s_2 = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi R\sin\alpha = \pi\cdot 6\,378\,\mathrm{km}\cdot\sin\left(0{,}1^\circ\right) \doteq 35{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Celková dráha je rovna součtu délky cesty k pólu (na sever), délky cesty na jih a délky cesty po rovnoběžce. Všechny tři úseky tedy sečteme. Dobu trvání výletu pak vypočteme jednoduše jako podíl celkové dráhy a Petrovy rychlosti

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2s_1 + s_2}{v} = \frac{2 \cdot 11{,}13\,\mathrm{km} + 35{,}5\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} = \doteq 5{,}776\,\mathrm{h} \doteq 5\,\mathrm{h}\,47\,\mathrm{min}\,.$$

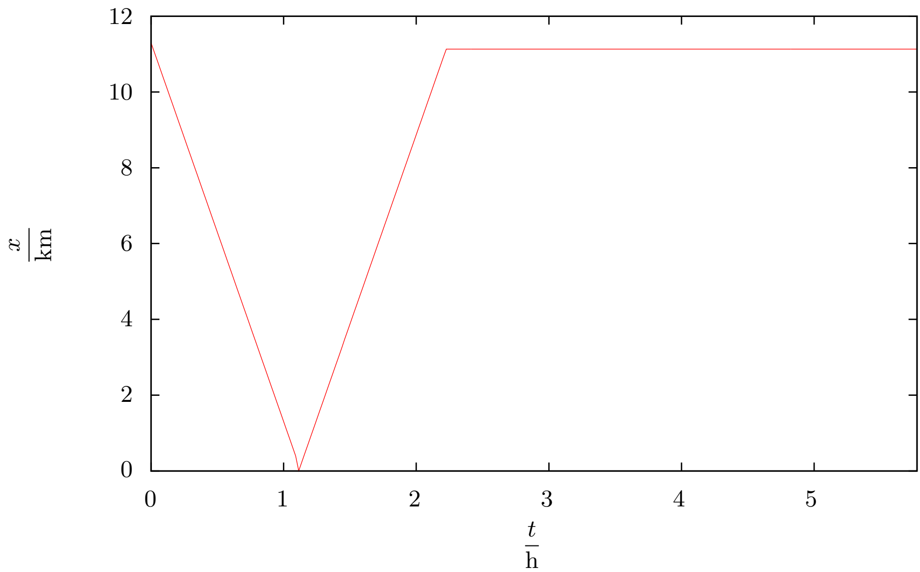
Petr se tedy vrátil do tábora za více jak pět a tři čtvrtě hodiny.

c) Hledáme závislost vzdálenosti od severního pólu na čase. To znamená, že na svislou osu vyneseme vzdálenost a na vodorovnou osu čas. Petrovu cestu si opět rozdělíme na tři části: na první, kdy jel od tábora k pólu, na druhou, kdy jel od pólu na jih a na třetí, kdy jel po rovnoběžce zpět do tábora. V grafu budou důležité časy, kdy bude Petr na pólu a kdy dojede do nejjižnějšího bodu své cesty a vydá se po rovnoběžce zpět do tábora.
První úsek začíná Petr v čase $t_1 = 0\,\mathrm{h}$, kdy bude jeho vzdálenost od severního pólu rovna $s_1 = 11{,}13\,\mathrm{km}$ (Petr se nachází v základním táboru). Graf tedy začíná v bodě $[0\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$ (první hodnota v závorkách označuje souřadnice bodu na vodorovné ose a druhá hodnotu souřadnice bodu na svislé ose). Jelikož se Petr přibližuje rovnoměrně, tj. za stejný časový úsek urazí stejnou vzdálenost, tato část grafu tedy bude klesající přímka, která bude klesat až do bodu kdy bude hodnota vzdálenosti od pólu rovna nule (tzn. Petr dosáhl severního pólu).
Jako další bod grafu tedy spočtěme, za jaký čas Petr k pólu dorazí. Víme, že za tuto dobu musí Petr urazit od začátku své cesty dráhu s_1 rychlostí v. Podle vztahu $t = s/v$ spočítáme odpovídající čas:

$$t_2 = \frac{s_1}{v} = \frac{11{,}13\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} 1{,}113\,\mathrm{h}\,.$$

První část grafu bude tedy úsečka s počátkem v bodě $[0\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$ a koncem v bodě $[1{,}113\,\mathrm{h}; 0\,\mathrm{km}]$.
Poté Petr vyrazí na jih, až dosáhne zase $0{,}1^\circ$ s.š. a ujede opět dráhu o velikosti s_1, přičemž se pořád pohybuje konstantní rychlostí v. Opět mu tedy tato cesta trvala čas $t_2 = 1{,}113\,\mathrm{h}$, tzn. začala v čase t_2 a skončila v čase $t_2 + t_2 = 2t_2 = 2{,}226\,\mathrm{h}$. Odpovídající vzdálenost od pólu v tomto čase bude stejná jako na začátku, tedy další bod našeho grafu má souřadnice $[2{,}226\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$.
Poslední část Petrovy cesty je cesta po rovnoběžce. Co to znamená pro náš graf? Znamená to, že jeho vzdálenost od severního pólu bude pořád konstantní, protože on bod severního pólu vlastně „obkrouží“ v konstantní vzdálenosti s_1. Tato část grafu tedy bude rovnoběžná s vodorovnou osou, která bude končit v bodě grafu mající časovou souřadnici rovnou $t = 5{,}776\,\mathrm{h}$, za který Petr urazil celou dráhu od tábora přes pól a zpět do tábora (viz výpočet ve třetím bodě). Tomuto bodu tedy odpovídají souřadnice $[5{,}776\,\mathrm{h}; 11{,}13\,\mathrm{km}]$, celý graf pak můžete vidět na obrázku 1.

d) V posledním bodě nám opět pomůže rozčlenění Petrovy cesty na tři části. Hledáme závislost rychlosti směrem na sever na čase, což znamená, že na vodorovné ose budeme vyznačovat čas a na svislé ose vyznačíme rychlost směrem na sever.
Když se bude Petr pohybovat z tábora k pólu, jeho rychlost ve směru na pól bude stejně velká jako rychlost jeho pohybu, tedy $v_1 = v = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Po minutí severního pólu se bude pohybovat směrem na jih, tedy směrem opačným než na sever. Jeho rychlost od pólu se tedy v čase t_2 rázem změní na $v_2 = -v = -10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Poslední část jeho cesty po rovnoběžce bude zanesena v grafu s rychlostí $v_3 = 0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, protože Petrova vzdálenost od pólu se



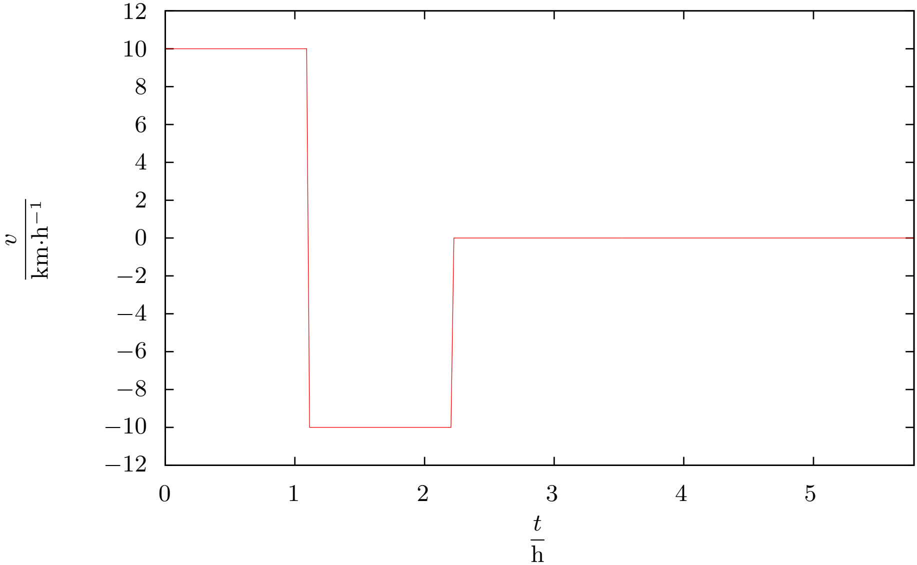
Obr. 1: Závislost dráhy na čase, který Petr urazil.

při cestě po rovnoběžce nemění. Časy, ve kterých se bude graf „lámat“, budou stejné, jako v předchozí otázce. Výsledný graf uvádíme na obrázku 2.

Poznámky k došlým řešením

Největší problém jste měli se zadáním, ve kterém jste se bohužel někteří zamotali. Nejvážnější početní problém však nastal v bodě, kdy jste měli spočítat vzdálenost cesty zpět, která kopírovala půlku rovnoběžky 89,9° severní šířky s poloměrem *rozdílným* od vzdálenosti pól-tábor, kterou jste všichni úspěšně spočítali v první části úlohy. Dráha pól-tábor je po povrchu Země, kdežto pomyslný poloměr rovnoběžky vede těsně pod povrchem Země. Hodnoty se vám sice moc nelišily, ale to jen díky tomu, že úhel 0,1° je opravdu malý. Za tento prohřešek jsem samozřejmě body odečíst musela.

Pavla Trembulaková
`pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz`



Obr. 2: Závislost Petrovy rychlosti směrem na sever na čase.