

Úloha I.C ... Výfuček na procházce

7 bodů; průměr 5,85; řešilo 67 studentů

Výfuček je velký fanoušek kartézské soustavy souřadnic. On sám používá takovou, která má počátek (bod $[0, 0]$) ve svém domě. Osa x směřuje na východ, osa y na sever.

- (a) O víkend se Výfuček vybral ze svého domu na procházku. Nejprve se přesunul o vektor $(1, 3)$ km, poté o vektor $(2, -1)$ km a nakonec o $(1, -5)$ km. Určete polohu bodu, kde se právě nachází.
- (b) Jak vzdálený je od Výfučka jeho dům?
- (c) Výfučkův kamarád Paťo bydlí 4 km daleko od místa, kde se Výfuček nachází. Vektor Paťovy polohy (vektor spojující Výfučkovu aktuální polohu a bod, kde se Paťo nachází) svírá s osou x úhel 60° . Určete, kolik kilometrů musí Výfuček ujet ve směrech os x a y , aby za Paťem došel.

- (a) Nejnázornější je použít čtverečkový papír, kde jedna strana čtverečku bude odpovídat 1 km. Vektory Výfučkova pohybu pak jednoduše zakreslíme do této sítě. Začneme v počátku, tedy v bodě $[0, 0]$. Výfuček se posunul o vektor $(1, 3)$, tedy napočítáme jeden čtvereček v kladném směru osy x (doprava) a tři v kladném směru osy y (nahoru).

Vektor první části Výfučkova pohybu vyznačíme v síti jednoduše – nakreslíme šipku z výchozího bodu, tedy z $[0, 0]$ do konečného bodu, tj. $[1, 3]$. Tento bod se pro nás nyní stává výchozím a zjistíme další pohyb Výfučka, $(2, -1)$. Nyní napočítáme 2 čtverečky doprava a 1 dolů, vektor znázorníme opět jako šipku vedoucí z počátečního bodu $[1, 3]$ do koncového $[3, 2]$. Stejným způsobem zjistíme, že Výfuček se dostal do dalšího, nyní již jeho posledního, bodu $[4, -3]$.

Ke stejnému výsledku se můžeme dostat i matematickou cestou, a to pomocí sčítání vektorů. Sečtením všech vektorů posunutí získáme výsledný vektor posunutí

$$(1, 3) + (2, -1) + (1, -5) = (1 + 2 + 1, 3 - 1 - 5) = (4, -3).$$

Výfuček se tedy z bodu $[0, 0]$ posunul do bodu $[0 + 4, 0 - 3] = [4, -3]$.

- (b) Vzdálenost dvou bodů můžeme chápat také jako délku úsečky, která je spojuje. Všimneme si, že vzdálenost Výfučka od jeho domu můžeme spočítat pomocí Pythagorovy věty: aby se dostal domů, musel by Výfuček ujet 3 km po síti nahoru a 4 km doleva. Tyto dvě části cesty jsou na sebe navzájem kolmé a tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, přičemž jeho přeponou je právě spojnice Výfučka a jeho domu.

Vybavení touto znalostí, výpočet je pro nás nyní snadný:

$$x^2 = (4 \text{ km})^2 + (3 \text{ km})^2 \Rightarrow x = \sqrt{25 \text{ km}^2} = 5 \text{ km}.$$

Stejně jako v předchozí části i zde můžeme postupovat čistě matematicky. Stačí si uvědomit, že vzdálenost Výfučka od jeho domu je stejná jako velikost výsledného vektoru posunutí. Jak jsme si již řekli ve Výfučtení, velikost vektoru určíme pomocí Pythagorovy věty a dostáváme stejný výsledek jako v předchozím odstavci, tedy 5 km.

- (c) Chceme-li zjistit, jakou vzdálenost musí Výfuček ujet ve směru osy x a jakou ve směru osy y , je třeba rozložit vektor Paťovy polohy. Jelikož známe výslednou vzdálenost k Paťovi (velikost vektoru), ale neznáme její složky v ose x a y , uděláme vlastně opačný postup, než jsme dělali v předchozí části. Zde si bohužel nemůžeme pomoci obrázkem a budeme muset počítat. Naštěstí můžeme využít vzorečků, které jsme si ukázali v textu Výfučtení.

Nejprve spočítáme x -ovou složku hledaného vektoru:

$$x = 4 \text{ km} \cdot \cos(60^\circ) = 2 \text{ km}.$$

Podobným způsobem vypočítáme i složku y -ovou:

$$y = 4 \text{ km} \cdot \sin(60^\circ) = 2\sqrt{3} \text{ km} \doteq 3,5 \text{ km}.$$

Výfuček tedy musí ujít 2 km ve směru osy x (doprava) a 3,5 km ve směru osy y (nahoru).

Lukáš Fusek

lukas@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.