Úloha I.5 ... Klouže to

8 bodů; průměr 3,77; řešilo 44 studentů

Jeden horký letní večer myslel Jindra na zimní prázdniny a na jeho oblíbený hokej. Když byl naposledy na stadionu, led byl perfektně kluzký, jen měl jednu vadu – kluziště nebylo vodorovné.

Jindra to poznal tak, že puk, který položil do středu kluziště, se začal sám bez tření klouzat přímo k jednomu z delších mantinelů. Stopkami Jindra změřil, že tato „cesta" puku trvá přesně 13,3 s*. Toto zjištění ale Jindru moc nepotěšilo, neboť všechny rovné střely na bránu budou na nakloněném kluzišti vybočovat.*

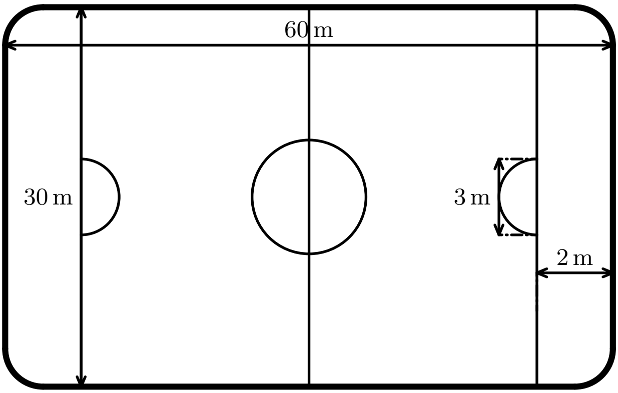
(a) *Jindra stojí ve středu kluziště a střílí přímo na střed branky rychlostí $v_1 = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jak se domníval, bránu kvůli náklonu kluziště netrefil. Nakreslete, jak asi vypadala trajektorie puku, který Jindra vystřelil.*

(b) *Vypočítejte, o kolik byla Jindrova střela odchýlena od středu branky v čase, kdy byla na úrovni brankové čáry.*

(c) *Jakou nejmenší rychlostí v_2 musí Jindra vystřelit, aby bránu trefil?*

(d) *Jak velkou rychlost by měl takto vystřelený puk v čase průchodu brankovou čárou?*

(e) *Určete velikost úhlu náklonu kluziště.*



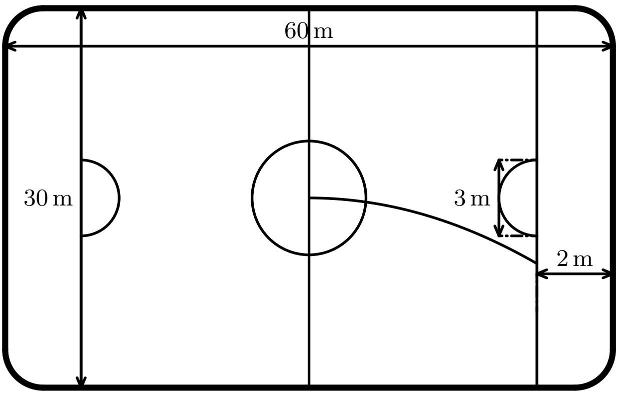
Obr. 1: Schéma kluziště a jeho rozměry

(a) Je třeba si uvědomit, že pohyb puku se skládá ze dvou *nezávislých* částí (složek). První je vodorovný pohyb puku směrem od středu kluziště do brány. Rychlost puku v tomto směru je konstantní – led je dokonale hladký, a proto zde není třecí síla, která by jeho pohyb zpomalovala. Druhým pohybem je sklouzávání puku „do strany". Rychlost tohoto pohybu směřuje kolmo k delšímu mantinelu, viz obrázek 1. Na rozdíl od předchozího případu, tento pohyb je rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí, tzn. jeho rychlost se v čase zvyšuje. Závěrem připomeňme, že oba pohyby mají počátek ve středu kluziště a jsou na sebe kolmé.

Rychlost $v_1 = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je pořád konstantní – její vektor bude úsečka stále o stejné velikosti a směru. Jenže puk se nebude pohybovat pořád rovně. Jelikož nám ve směru dolů (k delšímu mantinelu) puk zrychluje, jeho trajektorie se začne zakřivovat.[1]

Pro lepší pochopení si vyberme krátký časový úsek (třeba 1 s) a zamysleme se, o jakou vzdálenost se v jednotlivých směrech puk posune. Ve vodorovném směru (přímo ke kratšímu mantinelu) je, jak jsme již zmínili, pohyb rovnoměrný. Proto se *každou sekundu* puk přiblíží ke kratšímu mantinelu o stejnou vzdálenost (pro rychlost v_1 to bude $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 1\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{m}$). V kolmém směru (směrem k delšímu mantinelu) bude situace poněkud odlišná. Již jsme si řekli, že na začátku pohybu má v tomto směru puk nulovou počáteční rychlost, která rovnoměrně roste. To znamená, že během první sekundy rychlost puku v tomto směru naroste na nějakou (malou) hodnotu a puk se trochu přiblíží k delšímu mantinelu. Během druhé sekundy se rychlost opět zvýší o stejnou hodnotu. Avšak přiblížení puku k delšímu mantinelu stejné nebude, protože na začátku druhé sekundy již puk měl v tomto směru nějakou (počáteční) rychlost a na konci rychlost ještě větší. Puk se proto během druhé sekundy musí do strany posunout *více* než během první sekundy.

Další vývoj posunutí bude stejný, tzn. během každé vteřiny se puk přiblíží k delšímu mantinelu více než během předchozí. Naopak, v kolmém směru se bude puk posouvat stále stejně. Výsledná trajektorie proto musí být nutně zakřivena.



Obr. 2: Trajektorie vystřeleného puku

(b) Cílem je zjistit dráhu, kterou puk ujede ve svislém směru k delšímu mantinelu za čas, který potřebuje, aby ve vodorovném směru dojel na brankovou čáru rychlostí v_1.

Čas snadno spočteme, protože dráhu od středu kluziště po brankovou čáru si přečteme na nákresu u zadání ($= 28\,\mathrm{m}$). Jednoduše tedy zjistíme, že

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{28\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 7\,\mathrm{s}\,.$$

Jak již bylo zmíněno, ve svislém směru počítáme se zrychleným pohybem. Nejdříve tedy musíme zrychlení puku a zjistit. Vystačíme si se vzorcem pro dráhu zrychleného pohybu

[1] Konkrétně se trajektorie zakřiví do tvaru paraboly, jelikož velikost rychlosti puku směrem k delšímu mantinelu roste pořád stejným tempem.

s nulovou počáteční rychlostí[2] $s = at^2/2$ a s poznatkem, že dráhu $s^* = 15\,\mathrm{m}$ (polovina šířky kluziště) puk projel za čas $t = 13{,}3\,\mathrm{s}$. Po úpravě předchozího vztahu dostáváme:

$$a = \frac{2s^*}{t^2} = \frac{2 \cdot 15\,\mathrm{m}}{13{,}3\,\mathrm{s}^2} \doteq 0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Toto zrychlení dosadíme opět do vzorce pro dráhu zrychleného pohybu, ale s časem $t_1 = 7\,\mathrm{s}$. Tím dostaneme hledanou vzdálenost d_1, o kterou se puk odchýlil od přímého směru:

$$d_1 = \frac{0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot (7\,\mathrm{s})^2}{2} \doteq 4{,}17\,\mathrm{m}\,.$$

(c) Nejprve si musíme rozmyslet, jak závisí vychýlení puku na rychlosti Jindrovy střely. Čím rychleji Jindra vystřelí, tím kratší čas se bude puk pohybovat, než se dostane na úroveň branky. Rovněž ale platí, že za kratší čas puk sklouzne méně do strany. Pro nalezení minimální rychlosti Jindrovy střely musíme tedy hledat takovou rychlost, při níž puk sklouzne co nejvíc do strany, ale zároveň se jím Jindra trefí do branky. Toto maximální sklouznutí je jednoduše polovina šíře branky ($d_2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$).
Situace je tedy oproti předchozí úloze obrácená: známe maximální odchýlení, ale chybí nám rychlost v_2. Proto budeme obráceně i postupovat. Nejprve si ze vztahu pro dráhu zrychleného pohybu vyjádříme čas:

$$d_2 = \frac{1}{2}at_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2d_2}{a}}\,.$$

Po dosazení známých hodnot tedy získáváme

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}} \doteq 4{,}2\,\mathrm{s}\,.$$

Teď už vypočteme jen rychlost $v_2 = s/t_2$, kde dráha s je přímá vzdálenost od středu hřiště po brankovou čáru:

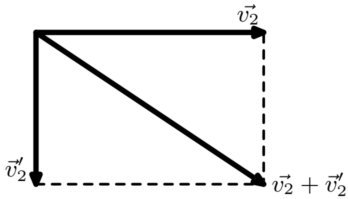
$$v_2 = \frac{28\,\mathrm{m}}{4{,}2\,\mathrm{s}} \doteq 6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

(d) Na první pohled to vypadá tak, že odpovědí je rychlost v_2, vypočítaná před chvílí. Není tomu ale tak. Nesmíme totiž zapomenout na sklouzávání puku do strany a obě rychlosti správně sečíst. Jelikož směry rychlostí jsou na sebe kolmé, výslednou rychlost vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, kde tyto dvě rychlosti budou odvěsny pravoúhlého trojúhelníka a jeho přepona bude výsledná rychlost v.
Zatím však onu rychlost sklouzávání v momentu průchodu brankovou čarou[3] neznáme, nejprve ji tedy musíme zjistit. Puk v tomto směru zrychluje po dobu t_2 zrychlením a z nulové počáteční rychlosti. Jeho rychlost tedy naroste na

$$v_2' = at_2 = 0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 4{,}2\,\mathrm{s} \doteq 0{,}71\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

[2]Pokud nějaký předmět zrychluje z klidu se zrychlením a po dobu t, nabude rychlost $v = at$. Ve vzorci se bohužel nenachází žádná dráha, kterou my chceme zjistit. Proto nejprve spočítáme průměrnou rychlost zrychleného pohybu. Jestliže rychlost po dobu t rovnoměrně rostla z nuly na v, průměrná rychlost pohybu je $v_\mathrm{p} = v/2$.
Dále platí, že dráha s, kterou za čas t ujede těleso zrychleně, musí být stejná jako dráha, kterou za stejnou dobu ujede rovnoměrnou rychlostí v_p. Proto je dráha zrychleného pohybu $s = v_\mathrm{p}t = vt/2$. Dosadíme-li za rychlost $v = at$, dostáváme výsledný vztah pro dráhu zrychleného pohybu $s = at^2/2$.

[3]Nemusí to být nutně průchod brankou.

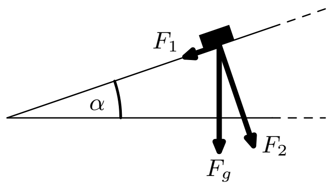


Obr. 3: Skládání rychlostí

Nyní zmíněné rychlosti (v_2 a v_2') složíme do jedné. Jak již bylo řečeno, použijeme Pythagorovu větu:

$$v^2 = v_2^2 + {v_2'}^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_2^2 + {v_2'}^2} = \sqrt{(6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 + (0{,}71\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} \doteq 6{,}74\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

(e) Kluziště si představíme jako nakloněnou rovinu, viz obrázek 4. Opět tu vidíme pravoúhlý trojúhelník (díky podobnosti trojúhelníků). Na puk působí tíhová síla F_g, kterou ale lze rozložit na složku F_1 (síla ve směru roviny – způsobuje zrychlení puku) a sílu F_2 (síla kolmá na rovinu – přitlačuje puk ke kluzišti).



Obr. 4: Pohled na kluziště zboku

Díky goniometrické funkci sinus v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou F_g vypočítáme délku odvěsny protilehlé k úhlu α, tzn. velikost síly F_1, která způsobuje odchylování puku do strany. Platí tedy

$$\sin\alpha = \frac{F_1}{F_g}\,.$$

Sílu F_1 již známe: umíme ji vypočítat jako součin hmotnosti puku a zrychlení, které tato síla způsobuje: $F_1 = ma$. Tedy pro sinus úhlu α platí

$$\sin\alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{0{,}17\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} = 0{,}017\,.$$

S tímhle výsledkem již nemůžeme udělat nic jiného, než ho zadat do kalkulačky a použít funkci arcus sinus (na kalkulačce $\sin^{-1}$), která zjistí úhel, pro který je sinus hodnota zadaná do kalkulačky. Dostáváme $\alpha \doteq 0{,}97^\circ$. Náklon Jindrova kluziště je tedy přibližně jeden stupeň.

Poznámky k došlým řešením

Mile mě překvapil počet lidí, kteří získali plný počet bodů. Mějte na paměti, že to byla jedna z těch těžších úloh (ne-li ta nejtěžší) a většina z vás si vedla opravdu dobře.

Bohužel, málokdo si uvědomil, že puk klouže do strany k mantinelu rovnoměrně zrychleným pohybem, a tak je jeho trajektorie *zakřivená*. Kdyby to byla přímka, tak by puk v obou směrech (k mantinelu i k brance) jel rovnoměrným přímočarým pohybem. Proto vám vycházely velké rychlosti a ještě větší velikosti odchýlení puku od středu branky.

Pokud jste počítali s tím, že rychlost puku směrem k mantinelu je konstantní (což není), pak jste v drtivé většině sice spočítali průměrnou rychlost puku, ale jen v případě, že opravdu urazí celých 15 m a celých 13,3 s, což třeba bod (b) nesplňoval.

Někteří si odvodili vzorec pro hodnotu zrychlení sami jako $a = s/t^2$, což je jednotkově správně, naneštěstí ale ve vzorci chybí konstanta 1/2. Proto se vaše zrychlení ve skutečnosti rovnalo polovině správného. V tomto vzorovém řešení naleznete správné odvození.

Pavla Trembulaková
`pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.